UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s4journaldemat09liou

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES,

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE.

PUBLIÉ DE 1875 A 1884

PAR H. RESAL.

QUATRIÈME SÉRIE,

PUBLIÉE

PAR CAMILLE JORDAN,

AVEC LA COLLABORATION DE

M. LEVY, A. MANNHEIM, É. PICARD, H. POINCARÉ, H. RESAL.

TOME NEUVIÈME. — ANNÉE 1893.

34142
20/6/94

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1893

(Tous droits réservés).

QH
1
J662
Ser.4
t.9

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Études sur l'emploi des percussions dans la théorie du mouvement d'un solide plongé dans un fluide [suite (1)],

Par M. H. WILLOTTE,

Ingénieur des Ponts et Chaussées.

1. *Objet du présent travail. Équations fondamentales.* — Nous nous proposons, dans cette seconde Partie de nos études, de rechercher dans quelles conditions les lois établies en notre première Partie (1) pour un fluide à points indépendants peuvent être étendues au cas où le fluide serait composé de points liés entre eux et au solide immergé par des forces à actions continues dépendant d'un potentiel.

Pour élucider la question, nous supposerons d'abord qu'aucune percussion ne se produise entre le solide et les points du fluide; nous établirons dans cette hypothèse les lois des petits mouvements du système qui laissent les différentes parties de ce système dans des po-

(1) Voir le *Journal de Mathématiques*, 4e série, t. VII, p. 399-431.

sitions constamment très voisines de leurs situations d'équilibre stable, de telle façon que le système reste en état de moyen mouvement permanent; nous examinerons ensuite quel est l'effet des percussions possibles.

Soit, en suivant la marche exposée par M. Resal pour l'étude des petits mouvements, pages 258 et suivantes du Tome I de son *Traité de Mécanique générale*,

$$(1) \qquad \sum \left[m \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2 y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2 z}{dt^2} \delta z \right) \right] = \delta \varphi$$

l'équation différentielle des mouvements du système, le $\sum$ du premier membre portant sur tous les points constitutifs du système et $\delta\varphi$ désignant la différentielle totale du potentiel de ce système.

Cherchons l'expression des liaisons.

Pour cela, prenons trois axes fixes Ox, Oy, Oz [les axes auxquels se rapporte l'équation (1)] coïncidant respectivement avec les positions des trois axes d'inertie principaux du solide passant par le centre de gravité G de celui-ci lorsque tout le système est immobile dans sa position d'équilibre stable. Marquons dans le solide deux points P, P′ situés respectivement, à l'unité de distance du point G, sur les axes principaux d'inertie qui, dans la position d'équilibre stable du système, coïncident avec les axes Ox, Oy (de telle sorte que $GP = GP' = 1$), et appelons à une époque quelconque t du mouvement :

x_0, y_0, z_0 les coordonnées du point G par rapport aux axes fixes Ox, Oy, Oz;

$x_0 + \sqrt{1 - y_1^2 - z_1^2}, y_0 + y_1, z_0 + z_1$ les coordonnées du point P;

$x_0 + x_2, y_0 + \sqrt{1 - x_2^2 - z_2^2}, z_0 + z_2$ les coordonnées du point P′ par rapport à ces mêmes axes.

Conformément aux règles usitées dans la théorie des petits mouvements, nous négligerons les puissances d'ordres supérieurs au premier et les produits des quantités toujours très petites $x_0, y_0, z_0, y_1, z_1, x_2, z_2$.

La relation qui exprime la perpendicularité des deux droites GP, GP′ sera alors

$$x_2 + y_1 = 0,$$

et les neuf cosinus directeurs du trièdre des axes principaux d'inertie du solide par rapport aux axes fixes Ox, Oy, Oz auront pour expressions

$$\begin{array}{llll} 1 & -y_1 & -z_1 & \text{(cosinus des angles faits avec } Ox\text{)}, \\ y_1 & 1 & -z_2 & \text{(cosinus des angles faits avec } Oy\text{)}, \\ z_1 & z_2 & 1 & \text{(cosinus des angles faits avec } Oz\text{)}. \end{array}$$

Si l'on considère dans le solide un point quelconque, dont on désigne par a, b, c les coordonnées par rapport au trièdre des axes principaux d'inertie du solide, on aura pour valeurs, à une époque quelconque, des coordonnées x, y, z de ce point par rapport aux axes fixes Ox, Oy, Oz

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= x_0 + a \quad - by_1 - cz_1, \\ y &= y_0 + ay_1 + b \quad - cz_2, \\ z &= z_0 + az_1 + bz_2 + c. \end{aligned}\right.$$

On en conclut, en désignant par $\underline{\sum}$ la partie de la somme du premier membre de l'équation (1) qui est relative aux points du solide,

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &\underline{\sum}\left[m\left(\frac{d^2x}{dt^2}\delta x + \frac{d^2y}{dt^2}\delta y + \frac{d^2z}{dt^2}\delta z\right)\right] \\ &= \underline{\sum}\Bigg[\quad m\left(\frac{d^2x_0}{dt^2} - b\frac{d^2y_1}{dt^2} - c\frac{d^2z_1}{dt^2}\right)(\delta x_0 - b\,\delta y_1 - c\,\delta z_1) \\ &\qquad + m\left(\frac{d^2y_0}{dt^2} + a\frac{d^2y_1}{dt^2} - c\frac{d^2z_2}{dt^2}\right)(\delta y_0 + a\,\delta y_1 - c\,\delta z_2) \\ &\qquad + m\left(\frac{d^2z_0}{dt^2} + a\frac{d^2z_1}{dt^2} + b\frac{d^2z_2}{dt^2}\right)(\delta z_0 + a\,\delta z_1 + b\,\delta z_2)\Bigg] \\ &= \mathrm{M}\left(\frac{d^2x_0}{dt^2}\delta x_0 + \frac{d^2y_0}{dt^2}\delta y_0 + \frac{d^2z_0}{dt^2}\delta z_0\right) \\ &\quad + \mathrm{A}\frac{d^2z_2}{dt^2}\delta z_2 + \mathrm{B}\frac{d^2z_1}{dt^2}\delta z_1 + \mathrm{C}\frac{d^2y_1}{dt^2}\delta y_1, \end{aligned}\right.$$

M étant la masse totale du solide, A, B, C ses moments d'inertie par rapport à ses trois axes principaux passant par son centre de gravité,

axes par rapport auxquels on a pour l'ensemble du solide

$$\sum ma = \sum mb = \sum mc = 0$$

et

$$\sum mbc = \sum mac = \sum mab = 0.$$

En remplaçant, dans le premier membre de l'équation (1), page 6 ci-dessus, la partie de la somme $\sum$ relative au solide par son expression écrite en les deux dernières lignes de la relation (3), on se trouve avoir tenu compte dans ce premier membre de toutes les liaisons du système.

Occupons-nous maintenant d'introduire l'effet des liaisons dans le second membre de la même équation (1).

La différentielle $\delta\varphi$ peut, à toute époque, se mettre sous la forme

$$\delta\varphi = \sum\left(\frac{d\varphi}{dx}\delta x + \frac{d\varphi}{dy}\delta y + \frac{d\varphi}{dz}\delta z\right),$$

les dérivées partielles $\frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}, \frac{d\varphi}{dz}$, dérivées qui sont des fonctions de toutes les coordonnées de tous les points du système, étant calculées avec les valeurs que possèdent ces coordonnées à l'époque considérée et le signe $\sum$ enfermant tous les points du système.

Les valeurs des déplacements de tous les points du système étant constamment très petites, on néglige, comme il a déjà été indiqué page 6 ci-dessus, les puissances d'ordres supérieurs au premier et les produits de ces déplacements, en sorte que, en remarquant que lorsque tous les points du système sont dans leurs positions d'équilibre stable les valeurs des dérivées $\frac{d\varphi}{dx}, \frac{d\varphi}{dy}, \frac{d\varphi}{dz}$ (composantes de la force agissant sur le point x, y, z) sont toutes nulles, il vient, d'après la formule de Taylor,

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= \sum(\alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1\zeta),\\ \frac{d\varphi}{dy} &= \sum(\alpha_2\xi + \beta_2\eta + \gamma_2\zeta),\\ \frac{d\varphi}{dz} &= \sum(\alpha_3\xi + \beta_3\eta + \gamma_3\zeta),\end{aligned}\right.$$

ξ, η, ζ étant les composantes parallèles aux axes fixes Ox, Oy, Oz du déplacement de l'un quelconque des points du système, les α, β, γ désignant des constantes et le signe $\sum$ enfermant tous les points du système.

Or, si l'on considère un point quelconque (a, b, c) du solide, les expressions des composantes : $x - a$, $y - b$, $z - c$ du déplacement de ce point seront d'après les formules (2) de la page 7 ci-dessus

$$(5)\qquad \begin{cases} x - a = x_0 - by_1 - cz_1, \\ y - b = y_0 + ay_1 - cz_2, \\ z - c = z_0 + az_1 + bz_2. \end{cases}$$

Par conséquent, en substituant dans les relations (4) à celles des valeurs de ξ, η, ζ qui appartiennent à des points du solide les expressions (5), on voit finalement que les dérivées $\frac{d\varphi}{dx}$, $\frac{d\varphi}{dy}$, $\frac{d\varphi}{dz}$ sont des formes linéaires des deux catégories de variables que voici :

1° Les six coordonnées x_0, y_0, z_0, y_1, z_1, z_2 des points G, P, P′ du solide;

2° Les composantes ξ, η, ζ des déplacements de tous les points du système qui ne font pas partie du solide (autrement dit de tous les points du fluide).

Ce sont également ces deux catégories de variables qui figurent dans les formes différentielles δx, δy, δz au second membre de l'équation (1), puisque, pour tous les points du solide, on a, d'après les formules (2),

$$\begin{aligned} \delta x &= \delta x_0 - b\,\delta y_1 - c\,\delta z_1, \\ \delta y &= \delta y_0 + a\,\delta y_1 - c\,\delta z_2, \\ \delta z &= \delta z_0 + a\,\delta z_1 + b\,\delta z_2. \end{aligned}$$

En définitive, l'étude du mouvement du système constitué par le fluide considéré et le solide qui y est immergé se trouve, on le voit, ramenée à l'étude d'un système sans liaisons, comprenant les deux catégories de deux variables indépendantes ci-dessus définies.

Si Π désigne le nombre total des points constitutifs du fluide (Π pouvant être aussi grand qu'on le voudra), le nombre total de variables à considérer sera $6 + 3\Pi$. Posons, pour simplifier l'écriture,

$$6 + 3\Pi = K.$$

Les équations sous forme finie du mouvement d'un tel système sont connues.

En désignant par k l'une quelconque des K variables du système, on a

$$k = \sum r \sin\sqrt{\rho}(t + \varepsilon), \tag{6}$$

ρ étant l'une quelconque des racines d'une équation de degré K dont toutes les racines doivent être réelles, positives et inégales (sans quoi, comme on sait, le maintien du moyen mouvement permanent du système animé de petits mouvements serait impossible),

le signe $\sum$ de l'expression (6) comprenant pour chaque variable un nombre K de termes de la forme indiquée,

r et ε étant des constantes.

Les K fonctions circulaires $\sin\sqrt{\rho}(t + \varepsilon)$, qui figurent dans chacune des K expressions (6) nécessaires pour représenter les K variables, sont les mêmes dans ces K expressions, en sorte que le système des K expressions (6) ne contient que K fonctions circulaires distinctes.

Les K constantes ε sont arbitraires.

Les constantes r ont des valeurs différentes dans chacune des K expressions intégrales (6). Il y a donc en tout K^2 constantes r; mais, sur ces K^2 constantes, il n'y en a que K qui soient arbitraires, les $K(K-1)$ autres s'exprimant linéairement en fonction de ces K arbitraires.

Il y a, en résumé, dans le système des K intégrales (6) 2K constantes arbitraires, savoir : 1° les K constantes ε; 2° K des constantes r.

Ces 2K constantes arbitraires se déterminent en écrivant qu'à une

époque t_0 quelconque les K composantes de déplacements k et les K dérivées $\frac{dk}{dt}$ de ces composantes ont des valeurs particulières choisies arbitrairement (valeurs qui doivent naturellement être prises très petites, mais dont certaines peuvent être infiniment grandes par rapport aux autres).

II. *Distribution des déplacements et des vitesses dans le fluide.* — D'après ce qui vient d'être dit, les composantes k, $\frac{dk}{dt}$ et, par suite, les grandeurs et les directions des déplacements et des vitesses de tous les points du système peuvent, à une certaine époque quelconque t_0, être choisies arbitrairement.

Il résulte de là que, lorsqu'on prend un système, comme celui ici considéré, formé d'un solide M plongé dans un fluide composé d'un nombre excessivement grand $\prod$ de points m, si par ailleurs aucune cause extérieure n'est venue agir sur ledit système pour lui imposer un mode particulier de distribution des déplacements et des vitesses, la distribution des grandeurs et des directions des déplacements et des vitesses des $\prod$ points m du fluide à l'époque t_0 doit être considérée comme uniquement régie par les lois du hasard.

Et cette distribution au hasard qui existe à l'époque t_0 se maintient à toute époque dans la suite des temps.

Si, en effet, on se reporte à l'expression générale (p. 10 ci-dessus) des K variables du système

$$k = \sum r \sin\sqrt{\rho}(t+\varepsilon), \tag{6}$$

on voit que l'on a

$$\frac{dk}{dt} = \sum r\sqrt{\rho}\cos\sqrt{\rho}(t+\varepsilon),$$

$$\frac{d^2k}{dt^2} = -\sum r\rho \sin\sqrt{\rho}(t+\varepsilon),$$

.....

et, par suite, que les dérivées successives en t des quantités k sont

égales à des sommes de produits des quantités r par des fonctions circulaires

$$\sqrt{\rho}\cos\sqrt{\rho}(t+\varepsilon), \quad -\rho\sin\sqrt{\rho}(t+\varepsilon), \quad \ldots,$$

qui sont les mêmes pour tous les points du système.

Si donc les valeurs des k et, par suite, des r sont distribuées suivant les lois du hasard à l'époque t_0, les valeurs à la même époque t_0 des dérivées successives en t de ces quantités k jouiront de la même propriété qui, par suite, se conservera à toute époque pour les valeurs de k et de leurs dérivées en t.

Par conséquent, les propriétés fondamentales dont, en notre première étude (*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. VII, p. 409), nous avons reconnu l'existence à toute époque dans le fluide à points indépendants, existent également dans le fluide présentement considéré. La seule différence qu'il y ait entre les deux cas est que, dans le fluide dont nous nous occupons maintenant, le nombre N de points m animés simultanément d'une même valeur de vitesse λ compris dans l'unité de volume du fluide (*loc. cit.*, p. 410), constant à toute époque en chaque région, varie d'une région à l'autre en proportion du nombre de points m compris en chaque région du fluide lorsque ces points sont à l'état de repos dans leurs positions d'équilibre stable.

Le nombre N étant variable d'une région à une autre du fluide, il importe d'indiquer comment on peut le définir en chaque région. Pour y arriver, il faut procéder comme l'on fait généralement en Mécanique et en Physique pour définir la densité en chaque point d'un fluide qui n'est pas homogène : si l'on considère dans le fluide un espace limité (E) quelconque, le nombre $\mathfrak{N}$ de points animés d'une même valeur de vitesse λ contenus dans cet espace (E) a naturellement une valeur bien déterminée. Le nombre N sera, par définition, la limite du rapport $\frac{\mathfrak{N}}{\text{volume de (E)}}$ lorsque l'on fait décroître indéfiniment les dimensions et, par suite, le volume de l'espace (E).

Cette définition exige que, quelque petit que soit (E), le nombre de points m qui y est contenu soit infiniment grand. Mais on arrivera toujours à réaliser cette condition en attribuant au fluide considéré un état de division infini, état que, nous l'avons dit au commencement

de ces études (*loc. cit.*, p. 400), nous supposons toujours réalisé (comme on le fait d'ailleurs en toute question de Physique et de Mécanique où il est utile de définir la densité en chaque point d'un fluide non homogène).

III. *Raisons d'être de la considération des percussions.* — Nous avons jusqu'ici, dans l'étude du mouvement du système considéré, fait complètement abstraction des percussions possibles.

Or il y a lieu maintenant de prendre en considération ces percussions; des rencontres entre les points m du fluide et la surface du solide M peuvent, en effet, se produire, quelque petits que soient d'ailleurs les déplacements des points m; il suffit pour cela que, dans la position d'équilibre stable du système, certains de ces points m soient très rapprochés de la surface du solide M.

Il est vrai que le cas d'un système comprenant des points m suffisamment rapprochés de la surface du solide M pour qu'au moindre ébranlement du système certains de ces points viennent choquer le solide peut *a priori* sembler assez exceptionnel; mais il ne faut pas perdre de vue ce que nous avons dit au commencement de notre précédente étude (p. 399), à savoir que nous considérons les forces de percussion comme des représentations de « ce que deviennent, dans l'hypothèse limite d'une vitesse d'accroissement infinie, les forces répulsives de la nature ». A ce point de vue, lorsque nous disons que dans un déplacement très petit, aussi petit que l'on voudra, d'un point m voisin de la surface limitative du solide M, ce point m vient heurter le solide, nous entendons seulement exprimer que ce point m, en se déplaçant, se meut dans la zone d'action des forces répulsives à petites distances émanées du centre matériel dont le solide M est la représentation mécanique. Et alors on conçoit que le fait de l'existence de rencontres entre les points m du fluide et le solide M doive être regardé non plus comme exceptionnel, mais, au contraire, comme très général, et que les conséquences tirées de la considération de ces rencontres soient susceptibles d'être employées très utilement dans l'explication théorique des lois naturelles, ce que nous nous proposons de montrer, en effet, dans la suite des présentes études.

Nous allons, en conséquence, analyser le rôle des percussions dans le système étudié.

IV. *Marche à suivre pour tenir compte des percussions successivement produites.* — Si l'on considère à une époque quelconque t le système formé par le fluide et le solide M qui y est immergé, les mouvements des différentes parties de ce système s'effectuent à partir de l'époque t, conformément aux lois étudiées ci-dessus, jusqu'à ce qu'un choc se produise entre l'un des points m du fluide et le solide.

Que va-t-il se passer quand un choc aura lieu? Pendant la durée infiniment petite du choc, les grandeurs des diverses composantes des déplacements des différents points du système resteront toutes invariables. Les composantes des vitesses de ces points se maintiendront également sans changements, à l'exception toutefois de celles qui appartiennent aux parties du système venues en contact mutuel dans le choc.

Nous savons qu'en employant les notations définies en notre précédente étude la percussion ϖ produite dans la rencontre du point m et du solide M est donnée (*voir* notre précédente étude, p. 408) par la formule

$$\varpi = \frac{2m(\lambda\cos\varphi - l)}{1 + \frac{m}{M} + \frac{m}{\mathfrak{M}}}.$$

La composante $\lambda\cos\varphi$ de la vitesse du point m suivant la normale en l'élément choqué du solide devient, après le choc,

$$(8)\qquad \lambda\cos\varphi - \frac{\varpi}{m} = \lambda\cos\varphi - \frac{2(\lambda\cos\varphi - l)}{1 + \frac{m}{M} + \frac{m}{\mathfrak{M}}};$$

quant à la composante de la vitesse de ce même point m suivant le plan tangent à l'élément choqué du solide, elle demeure invariable.

D'autre part, les relations (1) et (2) des pages 401 et 402 de notre précédente étude donnent pour les variations des composantes des

vitesses du solide

$$(9)\quad \begin{cases} u - u_0 = \dfrac{\varpi \cos\alpha}{M}, & v - v_0 = \dfrac{\varpi \cos\beta}{M}, & w - w_0 = \dfrac{\varpi \cos\gamma}{M}, \\ n - n_0 = \dfrac{h\varpi}{A}, & p - p_0 = \dfrac{i\varpi}{B}, & q - q_0 = \dfrac{j\varpi}{C}. \end{cases}$$

Ayant par la formule (8) ci-dessus la variation de la vitesse du point choquant m, on pourra par un calcul facile déterminer les variations des composantes de vitesses de ce point m suivant les axes fixes Ox, Oy, Oz définis page 6 ci-dessus.

Par ailleurs, connaissant par les relations (9) les variations des composantes u, v, w, n, p, q des vitesses du solide, on arrivera, à l'aide d'expressions aisées à construire, à évaluer les variations des composantes de vitesses suivant les mêmes axes fixes Ox, Oy, Oz des trois points G, P, P′ définis page 6 ci-dessus et par elles ensuite les variations des dérivées $\frac{dx_0}{dt}$, $\frac{dy_0}{dt}$, $\frac{dz_0}{dt}$, $\frac{dy_1}{dt}$, $\frac{dz_1}{dt}$, $\frac{dz_2}{dt}$ des variables x_0, y_0, z_0, y_1, z_1, z_2.

On a alors tout ce qu'il faut pour tenir compte de l'influence du choc considéré sur le mouvement du système. Prenons, en effet, l'expression générale des composantes des déplacements des points du système

$$(6)\qquad k = \sum r \sin\sqrt{\rho}(t + \varepsilon).$$

Considérons cette expression à l'instant qui suit immédiatement un choc et désignons par r_0 et ε_0 les valeurs qu'avaient dans cette même expression les paramètres r et ε à l'instant qui précède ce même choc.

Les K composantes des déplacements du système restant toutes invariables pendant la durée du choc, on peut, en exprimant cette propriété, écrire K relations de la forme

$$(10)\qquad \sum r \sin\sqrt{\rho}(t + \varepsilon) = \sum r_0 \sin\sqrt{\rho}(t + \varepsilon_0).$$

D'autre part, pour les $\frac{K - 3 - 6}{3}$ points du fluide qui n'interviennent

pas dans le choc, les composantes des vitesses demeurent également invariables pendant la durée du choc, circonstance qui permet d'écrire $K - 3 - 6$ relations de la forme

$$(11) \qquad \sum r\sqrt{\rho}\cos\sqrt{\rho}(l+\varepsilon) = \sum r_0\sqrt{\rho}\cos\sqrt{\rho}(l+\varepsilon_0).$$

On a donc ainsi formé $2K - 9$ relations entre les $2K$ paramètres r et ε dont il s'agit de déterminer les valeurs après le choc en fonction des valeurs r_0 et ε_0 de ces paramètres avant le choc; et il reste pour achever la définition de ces $2K$ paramètres à trouver neuf équations.

Or ces neuf équations complémentaires nécessaires s'obtiennent immédiatement en écrivant que les composantes suivant les axes de la vitesse du point choquant m d'une part, les quantités $\frac{dx_0}{dt}$, $\frac{dy_0}{dt}$, $\frac{dz_0}{dt}$, $\frac{dy_1}{dt}$, $\frac{dz_1}{dt}$, $\frac{dz_2}{dt}$ relatives au solide choqué d'autre part éprouvent par l'effet du choc les variations que nous avons appris à calculer page 15 ci-dessus.

Les $2K$ paramètres r et ε des expressions (6) se trouvent donc ainsi déterminés après le choc et par eux le mouvement de tous les points du système est défini jusqu'au choc suivant, choc pour lequel on peut opérer de nouveau comme il vient d'être indiqué; en sorte que, en continuant ainsi, on arrive à suivre indéfiniment le mouvement du système.

V. *Étude des effets des percussions sur l'état intérieur du fluide.* — Il nous faut maintenant étudier les effets des percussions produites sur l'état intérieur du fluide.

Pour cela, prenons l'expression (8), p. 14 ci-dessus, de la valeur après le choc de la composante suivant la normale en l'élément choqué de la vitesse du point choquant

$$\lambda\cos\varphi - \frac{2(\lambda\cos\varphi - l)}{1 + \frac{m}{M} + \frac{m}{\mathfrak{M}}}.$$

En posant, comme nous l'avons fait en la page 417 de notre précé-

dente étude, $\frac{1}{M} + \frac{1}{\mathfrak{M}} = \frac{1}{\mu}$, on peut écrire ladite expression sous la forme

$$(8\ bis)\qquad \frac{-\lambda\cos\varphi + \frac{m}{\mu}\lambda\cos\varphi + 2l}{1 + \frac{m}{\mu}}.$$

Si le solide était immobile (auquel cas la composante l de la vitesse de l'élément choqué serait nulle) et possédait une masse infinie (de telle façon que le rapport $\frac{m}{\mu}$ fût rigoureusement nul), l'expression en question se réduirait à $-\lambda\cos\varphi$. Alors l'effet des rencontres des points m et de la surface du solide serait sans influence sur l'état moyen du fluide en chaque région de celui-ci : les points m venant rencontrer successivement la surface du solide rebondiraient sur cette surface en faisant un angle de réflexion égal à l'angle d'incidence et tout se passerait comme si l'espace occupé par le solide était rempli par une masse de fluide dont la constitution et l'état mécanique seraient en continuité avec la constitution et l'état du fluide extérieur au solide.

Mais le solide est en mouvement et le rapport $\frac{m}{\mu}$, tout en étant infiniment petit (*voir* notre précédente étude, p. 407) n'est pas rigoureusement nul.

L'expression (8 *bis*) montre que, pour tenir compte de ces particularités, il faut ajouter au terme $-\lambda\cos\varphi$, qui représenterait la valeur de la composante de vitesse après le choc dans le cas du solide immobile, des termes qui sont au plus des ordres de grandeur $\frac{m}{\mu}\lambda$ et l.

D'autre part, les expressions (6), p. 10, des composantes du mouvement du système sont linéaires par rapport aux paramètres $r\cos\sqrt{\rho}\,\varepsilon$, $r\sin\sqrt{\rho}\,\varepsilon$ qui y apparaissent lorsqu'on développe leurs fonctions circulaires. On peut donc, en calculant les valeurs de ces paramètres après un choc, déterminer séparément : 1° la partie de chacun desdits paramètres correspondant au changement par lequel la composante de vitesse $\lambda\cos\varphi$ devient $-\lambda\cos\varphi$; 2° la partie complémentaire de

chacun de ces mêmes paramètres relative à la modification qu'il faut faire subir à la composante $-\lambda\cos\varphi$ pour la transformer en l'expression (8 *bis*).

Si l'on appelle d'une part r_1, ε_1, d'autre part r_2, ε_2 les valeurs de r et de ε correspondant respectivement au premier et au second de ces deux changements, l'expression

$$(6) \qquad k = \sum r \sin\sqrt{\rho}\,(t+\varepsilon),$$

calculée après le choc, peut s'écrire

$$(6\ bis) \qquad k = \sum r_1 \sin\sqrt{\rho}\,(t+\varepsilon_1) + \sum r_2 \sin\sqrt{\rho}\,(t+\varepsilon_2).$$

Le terme $\sum r_1 \sin\sqrt{\rho}\,(t+\varepsilon_1)$ de cette expression (6 *bis*) est tel que, d'après ce qui a été expliqué page 17 ci-dessus, s'il existait seul, les percussions ne produiraient aucune perturbation dans l'état moyen du fluide en chaque région; il n'y a donc pas lieu de s'en occuper davantage.

Reste à examiner l'influence du terme $\sum r_2 \sin\sqrt{\rho}\,(t+\varepsilon_2)$ de cette même expression (6 *bis*).

Or, pour déterminer les 2K paramètres r_2 et ε_2 qui figurent dans ce terme, nous avons d'abord à écrire $2K-9$ relations (K pour les composantes de déplacements, $K-9$ pour les composantes de vitesses) de l'une ou l'autre des formes

$$(12) \qquad \sum r_2 \sin\sqrt{\rho}\,(t+\varepsilon_2) = 0, \qquad \sum r_2\sqrt{\rho}\cos\sqrt{\rho}\,(t+\varepsilon_2) = 0;$$

ces $2K-9$ relations exprimant que les termes correctifs à ajouter aux expressions des K composantes des déplacements du système, pour tenir compte de l'effet du mouvement du solide M au moment d'un choc, ont des valeurs initiales nulles et qu'il en est de même des termes correctifs analogues relatifs aux $K-9$ composantes de vitesses des $\frac{K-9}{3}$ points m qui n'interviennent pas dans le choc.

Puis, pour compléter la détermination des 2K paramètres r_2 et ε_2, nous devons considérer 9 relations de la forme

$$(13) \qquad \sum r_2 \sqrt{\rho} \cos \sqrt{\rho}\,(t + \varepsilon_2) = \eta t + \theta \frac{m}{\mu} \lambda,$$

dans lesquelles l'expression $\eta t + \theta \frac{m}{\mu} \lambda$ désigne une quantité qui est au plus des ordres de grandeur de la vitesse t et du produit $\frac{m}{\mu} \lambda$. Ces 9 relations sont relatives aux variations des composantes de vitesses du point choquant d'une part, du solide d'une autre.

En rapprochant les $2K - 9$ relations (12) et les 9 relations (13), on forme un système de 2K relations propres à déterminer les 2K paramètres r_2 et ε_2, et l'on voit de suite, par l'examen du tableau constitué par ce système, que les paramètres r_2 seront de l'ordre de grandeur du second membre des relations (13), c'est-à-dire des ordres de grandeur des quantités t et $\frac{m}{\mu} \lambda$.

Par ailleurs, l'expression $\sum r_2 \sin \sqrt{\rho}\,(t + \varepsilon_2)$ est une somme de fonctions circulaires et, comme ses termes constitutifs, étant indépendants les uns des autres, sont les uns d'un signe, les autres d'un autre, son ordre de grandeur est le même que celui des paramètres r_2.

Chacun des chocs qui se produit entre les divers points m du fluide et le solide détermine l'adjonction aux expressions des composantes de chacun des divers points m du fluide d'une expression corrective de la forme $\sum r_2 \sin \sqrt{\rho}\,(t + \varepsilon_2)$ indiquée ci-dessus, aussi bien pour ceux des points m qui n'interviennent pas dans le choc que pour celui qui produit le choc.

Ces expressions correctives sont toutes constituées par des sommes de fonctions circulaires qui, nous venons de le dire, sont des ordres de grandeur des paramètres r_2 et, par suite, des quantités t et $\frac{m}{\mu} \lambda$. De plus, toute expression corrective appartenant à un point, qui n'intervient pas dans le choc auquel elle doit sa naissance, a une valeur initiale nulle, en sorte qu'elle a, à une époque quelconque, autant de chances d'avoir le signe + que le signe −.

Il en résulte que pour tout point du fluide, comme les expressions correctives qui naissent pour ce point, en dehors du moment où il intervient dans un choc, sont, dans un fluide infiniment divisé, infiniment plus nombreuses que celles qui se produisent dans les chocs déterminés par le point, la somme algébrique des expressions correctives ajoutées successivement aux expressions des composantes du mouvement dudit point a, à une époque quelconque, des chances respectives d'avoir le signe + ou le signe —, dont la différence est infiniment petite par rapport à leurs valeurs.

Et, d'après cela, pour tenir compte, dans l'étude des chocs produits entre le solide M et les points m du fluide, des altérations que ces chocs produisent dans l'état du fluide, il faut ajouter aux expressions des composantes du mouvement des points m dans le fluide non altéré des expressions correctives qui sont au plus des ordres de grandeur des quantités l, $\frac{m}{\mu}\lambda$ et dont le signe est (en négligeant des quantités relatives infiniment petites) aussi souvent + que —.

Nous pouvons donc, pour la sommation des effets de ces chocs sur chaque élément $d\sigma$ de la surface du solide, partir de l'expression (24) de la page 416 de notre précédente étude,

$$-\frac{2m(\lambda\cos\varphi - l)^2}{1+\frac{m}{\mu}}\left(l+\frac{m}{\mu}\frac{\lambda\cos\varphi - l}{1+\frac{m}{\mu}}\right)\mathrm{N}\,t\sin\varphi\,d\varphi\times d\sigma,$$

en y ajoutant à la quantité $\lambda\cos\varphi$ un terme correctif de la forme $\eta_1 l + \theta_1\frac{m}{\mu}\lambda$, η_1, θ_1 étant des coefficients de grandeur finie dont le signe est aussi souvent + que —.

Si alors, développant les calculs, on supprime finalement, comme il a été fait en la page 420 de notre précédente étude, tous les termes qui sont d'un ordre de petitesse supérieur à ceux des produits $l^2\lambda$, $\frac{m}{\mu}\lambda^3$, on est conduit, pour représenter la somme $\sum_1 \varphi$, à une expression qui ne diffère de celle

$$\sum_1 \varphi = -2m\mathrm{N}\left(\frac{l\lambda^2}{3} + l^2\lambda - \frac{m}{\mu}\frac{\lambda^3}{4}\right)t\,d\sigma,$$

établie sous le n° (25 *bis*) en ladite page 420, que par un terme correctif de la forme $\eta_2 l^2 \lambda$ [1], η_2 étant un coefficient dont le signe est aussi souvent + que —.

Mais ensuite lorsque, continuant la série d'opérations indiquées aux pages 420 et 421 de notre précédente étude, on fait la sommation par rapport au temps t des expressions (25 *bis*), complétées par les termes correctifs en $\eta_2 l^2 \lambda$, pendant un espace de temps T infiniment grand pour diviser ensuite par T le résultat obtenu, les valeurs des sommes des termes correctifs en $\eta_2 l^2 \lambda$ à signes variables sont nécessairement finies, quelque grand que soit T, et, par conséquent, leurs quotients par T seront infiniment petits pour $T = \infty$.

Les termes correctifs disparaissent ainsi du résultat final, en sorte qu'il n'y a pas lieu de s'en occuper davantage.

VI. *Conséquence de la non-homogénéité du fluide.* — Il reste à examiner une particularité importante qui différencie le cas du fluide à actions continues intérieures ici considéré du cas simple traité dans notre précédente étude.

Quand le fluide est à points indépendants, quand de plus, ce qui est le cas de notre précédente étude, aucune force continue ne s'exerce entre le solide M et les points m constitutifs du fluide, les valeurs des nombres N (nombre de points m animés d'une même valeur de vitesse λ compris en chaque région dans l'unité de volume du fluide) restent les mêmes dans toute l'étendue du fluide et particulier tout le long de la surface du solide.

Il n'en est plus de même dans le cas actuellement examiné du fluide à actions continues intérieures. Les nombres N, constants à toute époque en chaque région du fluide, changent de valeurs d'une région à l'autre du fluide et, par suite, ne sont pas, en général, égaux entre eux dans toute l'étendue de la zone du fluide placée en contact avec la surface du solide.

Il en résulte que l'on ne peut plus, comme nous l'avons fait en la

---

[1] On voit, en effet, immédiatement par le détail des calculs que cette expression ne contient pas de termes correctifs en $l\lambda^2$, ni non plus en $\frac{m}{\mu}\lambda^3$.

page 421 de notre précédente étude, mettre la somme $\sum N m \lambda^2$ en facteur commun dans le premier terme du second membre de la relation (27) de ladite page 421, et montrer ainsi, en s'appuyant sur la formule $\int l\, d\sigma = 0$, que ce premier terme est nul. Que faire alors?

Pour élucider la question, prenons l'expression de l donnée par la formule (22) de la page 416 de notre précédente étude,

$$l = u \cos\alpha + v \cos\beta + w \cos\gamma + hn + ip + jq;$$

on en conclut

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum\left(\frac{1}{T}\int_0^T l\, dt \times \sum N m \lambda^2\right) d\sigma \\ &\quad = \frac{1}{T}\int_0^T u\, dt \times \sum N m \lambda^2 \cos\alpha\, d\sigma \\ &\qquad + \frac{1}{T}\int_0^T v\, dt \times \sum N m \lambda^2 \cos\beta\, d\sigma + \frac{1}{T}\int_0^T w\, dt \times \sum N m \lambda^2 \cos\gamma\, d\sigma \\ &\qquad + \frac{1}{T}\int_0^T n\, dt \times \sum N m \lambda^2 h\, d\sigma \\ &\qquad + \frac{1}{T}\int_0^T p\, dt \times \sum N m \lambda^2 i\, d\sigma + \frac{1}{T}\int_0^T q\, dt \times \sum N m \lambda^2 j\, d\sigma. \end{aligned}\right.$$

Dans cette relation (14), le premier $\sum$ du premier membre comprend tous les $d\sigma$ de la surface du solide; le second $\sum$ de ce même membre porte sur toutes les valeurs de λ existant en chacune des régions du fluide placées respectivement en contact avec chacun des $d\sigma$. Les $\sum$ du second membre représentent des sommations doubles portant à la fois sur tous les $d\sigma$ du solide et sur tous les λ correspondant dans le fluide à chacun de ces $d\sigma$.

Quelles sont les conditions auxquelles doit satisfaire l'expression constituant le second membre de la relation (14) ainsi formée pour que ladite expression et par suite le premier membre de cette relation

soient identiquement nuls ou tout au moins aient une limite nulle pour $T = \infty$?

Comme les valeurs simultanées des différentes composantes de vitesses u, v, w, n, p, q du solide sont évidemment indépendantes les unes des autres, pour que le second membre de la relation (14) ait une limite nulle, il est nécessaire que les six termes de ce second membre aient séparément des limites nulles.

Prenons le premier desdits termes : $\frac{1}{T}\int_0^T u\,dt \times \sum N m \lambda^2 \cos\alpha\, d\sigma$.

Pour que ce terme soit identiquement nul ou tout au moins ait une limite nulle pour $T = \infty$, il faut que l'on ait

$$(15)\qquad \begin{cases} \text{ou bien} \quad \frac{1}{T}\int_0^T u\,dt = 0, \\ \text{ou bien} \quad \sum N m \lambda^2 \cos\alpha\, d\sigma = 0. \end{cases}$$

Mais, en appliquant aux variations de la composante u la marche indiquée au § XII, page 430 de notre précédente étude, on trouve par un calcul facile que la condition nécessaire et suffisante pour que la quantité $\frac{1}{T}\int_0^T u\,dt$ ait une limite nulle est que la somme

$$\sum N m \lambda^2 \cos\alpha\, d\sigma$$

soit égale à zéro. L'alternative (15) équivaut donc en tout cas à la condition $\sum N m \lambda^2 \cos\alpha\, d\sigma = 0$.

En répétant sur les cinq autres termes du second membre de la relation (14) ce que l'on vient de dire au sujet du premier, on trouve que finalement les six conditions nécessaires et suffisantes pour que le premier membre de ladite relation (14) ait une limite nulle pour $T = \infty$ sont

$$(16)\qquad \begin{cases} \sum N m \lambda^2 \cos\alpha\, d\sigma = 0, & \sum N m \lambda^2 \cos\beta\, d\sigma = 0, & \sum N m \lambda^2 \cos\gamma\, d\sigma = 0, \\ \sum N m \lambda^2 h\, d\sigma = 0, & \sum N m \lambda^2 i\, d\sigma = 0, & \sum N m \lambda^2 j\, d\sigma = 0. \end{cases}$$

VII. *Examen de deux cas particuliers (notamment du cas des solides qui ont pour plans de symétrie les plans de leurs axes principaux passant par leurs centres de gravité).* — Les conditions (16) sont compatibles avec le maintien de la condition de distribution suivant les lois du hasard des valeurs des composantes des vitesses λ dans les différentes régions du fluide, indiquée page 12 ci-dessus, quand on a

$$(17)\quad \begin{cases} \sum N m \cos\alpha \, d\sigma = 0, & \sum N m \cos\beta \, d\sigma = 0, & \sum N m \cos\gamma \, d\sigma = 0, \\ \sum N m h \, d\sigma = 0, & \sum N m i \, d\sigma = 0, & \sum N m j \, d\sigma = 0. \end{cases}$$

Car, quand les vitesses λ sont réparties suivant les lois du hasard dans toute l'étendue du fluide, la somme $\sum N m \lambda^2$ est, en chaque région, égale au produit $A \sum N m$ d'une quantité A, qui a la même valeur dans toute l'étendue du fluide, par la somme $\sum N m$ (masse de l'unité de volume en chaque région).

Les conditions (17) sont notamment satisfaites dans deux cas :

1° Quelle que soit la forme du solide M, si la loi de distribution des forces du système est telle que les nombres N soient constants, non pas nécessairement dans toute l'étendue du fluide, mais tout au moins dans la zone du fluide qui est en contact avec la surface du solide.

2° Quelle que soit la loi de distribution des forces du système lorsque le système admet comme plans de symétrie les faces du trièdre ayant pour arêtes les axes d'inertie principaux du solide M passant par son centre de gravité (comme cela arrive, par exemple, quand le solide M est un ellipsoïde homogène); dans ce cas, en effet, les sommes formant les premiers membres des relations (17) sont toutes nulles, comme composées d'éléments égaux et de signes contraires se détruisant deux à deux.

Dans ces deux cas, on pourra répéter les raisonnements des pages 423 et suivantes de notre précédente étude, et remarquant que, pareille-

ment à ce qui a été dit ci-dessus pour la somme $\sum Nm\lambda^2$, on a

$$\sum Nm\lambda = A_1 \sum Nm, \qquad \sum Nm^2\lambda^3 = A_2 \sum Nm \text{ (1)}$$

et, par suite,

$$\frac{\Sigma Nm^2\lambda^3}{\Sigma Nm\lambda} = \frac{A_2}{A_1},$$

A_1, A_2 étant des quantités constantes dans toute l'étendue du fluide, on arrivera aux équations (34) et (35) de la page 429 de notre précédente étude et par elles aux deux théorèmes que voici :

La valeur moyenne de la force vive totale d'un solide invariable en état de moyen mouvement permanent au sein d'un fluide infiniment divisé, dont les points sont liés entre eux et au solide par des forces dépendant d'un potentiel, est égale, quelles que soient les dimensions *et la* masse *du solide, à une quantité qui ne dépend que de la constitution du fluide.*

La force vive moyenne de translation du solide est égale à sa force vive moyenne de rotation.

VIII. *Cas général.* — Passons au cas général.

Les équations (17) ne sont plus alors ordinairement satisfaites et, par conséquent, il n'est plus possible de regarder les équations nécessaires (16) comme compatibles avec le fait de l'égale distribution des λ dans les diverses régions du fluide.

Qu'arrive-t-il alors?

Pour élucider la question, nous commencerons par mettre en évidence une importante propriété du mouvement du système qui a lieu quand, comme dans les cas examinés au paragraphe précédent, les conditions (17) de la page 24 ci-dessus étant vérifiées, les équations (34), (35) de notre première étude sont applicables.

---

(1) Cette relation suppose que tous les points m consécutifs du fluide aient même valeur de masse ou tout au moins que la composition du fluide en points m de masses différentes calculée pour chaque région soit constante dans toute l'étendue de la couche de ce fluide placée en contact avec le solide.

Prenons la relation (27) de la page 421 de ladite étude et divisons-en les deux membres par T; il viendra

$$\frac{1}{T}\sum v = \left(-\frac{2}{3}\frac{1}{T}\int_0^T l\,dt \times \sum N m\lambda^2 - \frac{2}{T}\int_0^T l^2\,dt \times \sum N m\lambda + \frac{1}{2\mu}\sum N m^2\lambda^3\right)d\sigma.$$

Examinons les termes enfermés dans la parenthèse du second membre de cette relation.

Le premier de ces termes est nul, parce que l'on a alors, ainsi qu'il a été indiqué en la page 431 de notre première étude, pour tout élément $d\sigma$ de la surface du solide, $\frac{1}{T}\int_0^T l\,dt = 0$.

D'autre part, d'après l'expression de l, reproduite page 22 ci-dessus, on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_0^T l^2\,dt = {} & \cos^2\alpha \times \frac{1}{T}\int_0^T u^2\,dt \\ & + \cos^2\beta \times \frac{1}{T}\int_0^T v^2\,dt + \cos^2\gamma \times \frac{1}{T}\int_0^T w^2\,dt \\ & + h^2 \times \frac{1}{T}\int_0^T n^2\,dt + i^2 \times \frac{1}{T}\int_0^T p^2\,dt + j^2 \times \frac{1}{T}\int_0^T q^2\,dt \\ & + 2\cos\alpha\cos\beta \times \frac{1}{T}\int_0^T uv\,dt \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

et, par suite, en tenant compte des équations (34), (35) susvisées,

$$\begin{aligned}\frac{1}{T}\int_0^T l^2\,dt &= \left(\frac{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma}{M} + \frac{h^2}{A} + \frac{i^2}{B} + \frac{j^2}{C}\right) \times \frac{1}{4}\frac{\Sigma N m^2\lambda^3}{\Sigma N m\lambda} \\ &= \frac{1}{4\mu}\frac{\Sigma N m^2\lambda^3}{\Sigma N m\lambda},\end{aligned}$$

puisque par ailleurs la quantité μ est définie (p. 417 et 405 de notre précédente étude) par les égalités

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{M} + \frac{1}{\mathfrak{M}}, \qquad \frac{1}{\mathfrak{M}} = \frac{h^2}{A} + \frac{i^2}{B} + \frac{j^2}{C}.$$

On a donc, dans ces conditions, en tout $d\sigma$ de la surface du solide

$$(18)\quad \frac{1}{T}\sum_3 \vartheta = \left(-\frac{1}{2\mu}\frac{\Sigma N m^2\lambda^3}{\Sigma N m\lambda}\times\sum N m\lambda + \frac{1}{2\mu}\sum N m^2\lambda^2\right)d\sigma = 0.$$

Or, comme la variation ϑ de force vive éprouvée par le solide dans chaque choc est égale et de signe contraire à celle que subit le point choquant m du fluide, il résulte de l'équation (18) ainsi établie que la moyenne des variations de force vive dans chacune des régions du fluide qui sont respectivement en contact avec chacun des éléments $d\sigma$ de la surface du solide est nulle, en sorte que le maintien du moyen mouvement permanent se trouve ainsi indéfiniment assuré en chaque région isolée du fluide.

Dans le cas général, les conditions (17) de la page 24 ci-dessus et, par suite, les équations (34), (35) de notre précédente étude n'étant pas ordinairement satisfaites, l'équilibre dynamique du système ne peut se réaliser aussi simplement et il faut que des déplacements de force vive se produisent dans le fluide le long de lignes tracées sur la surface du solide, *avec prédominance dans des sens déterminés*, de façon que les régions du fluide, pour lesquelles la quantité $\frac{1}{T}\sum_3 \vartheta$ a une valeur négative, cèdent de la force vive à celles pour lesquelles cette même quantité a une valeur positive. Ces déplacements de force vive avec prédominance de sens n'existent pas dans le cas, examiné au paragraphe précédent, des solides ayant pour plans de symétrie les plans des axes principaux de leurs centres de gravité, puisque, comme il vient d'être établi, la quantité $\frac{1}{T}\sum_3 \vartheta$ y est nulle en toute région du fluide. On conçoit donc que si, prenant un solide M quelconque, on imagine une série de solides tels que chaque solide soit infiniment peu différent de ceux qui l'avoisinent dans la série et que, en outre, la série parte du solide M pour aboutir à un solide à trois plans de symétrie, les formules qui donneront les conditions de l'état de moyen mouvement permanent pour chacun des solides de la série (plongé isolément dans un fluide) varieront d'une façon continue, les déplacements de force vive avec prédominance de sens prenant de

moins en moins d'importance à mesure que partant du solide M on se rapproche de plus en plus du solide à plans de symétrie. Et, si le solide M est peu différent d'un solide à plans de symétrie, on pourra considérer les formules relatives à ce dernier comme représentant approximativement le mouvement du solide M; en sorte que les théorèmes établis, page 25 ci-dessus, pour les solides à plans de symétrie, seront d'autant plus près d'être applicables à un solide M quelconque que ce solide différera moins d'un solide à plans de symétrie (quelle que soit d'ailleurs l'expression analytique de la surface limitative de celui-ci).

Théorie générale des surfaces hyperelliptiques [1];

PAR M. G. HUMBERT.

PREMIÈRE PARTIE.

INTRODUCTION ET GÉNÉRALITÉS.

Introduction.

Le présent Mémoire est consacré à l'étude des surfaces remarquables, introduites dans la Science par M. Picard, et pour lesquelles les coordonnées non homogènes d'un point quelconque peuvent s'exprimer en fonction uniforme, quadruplement périodique, de deux paramètres.

Pour abréger le discours, nous désignerons ces surfaces sous le nom de *surfaces hyperelliptiques*, qui rappelle leur propriété fondamentale.

Les travaux de M. Poincaré sur les zéros communs à plusieurs fonctions abéliennes thêta sont, avec ceux de M. Picard sur les surfaces qui nous occupent, la base de nos recherches.

Notre Mémoire, après un Chapitre consacré à des généralités, est divisé en deux Sections principales : la première est relative à la sur-

[1] Mémoire couronné par l'Académie des Sciences (Prix Bordin, 1892).

face de Kummer; la seconde aux surfaces hyperelliptiques en général.

La surface de Kummer a déjà été l'objet de travaux nombreux et importants, en Allemagne surtout. Nous n'avons pas prétendu en faire une étude complète, en réunissant et en reliant les résultats obtenus par nos devanciers; nous nous sommes borné à lui appliquer les méthodes dont nous faisons usage dans la suite pour les surfaces hyperelliptiques générales : c'est ainsi que nous avons laissé systématiquement de côté les questions qui se rapportent à la surface de Kummer considérée comme surface des singularités de complexes du second ordre, ou comme surface focale de congruences rectilignes. De même, bien que nos méthodes fussent facilement applicables à ce problème, nous n'avons pas parlé des quinze transformations linéaires de la surface en elle-même.

Ce que nous avons eu surtout en vue, c'est l'étude des courbes tracées sur la surface de Kummer et celle des propriétés des surfaces qui passent par ces courbes.

Nous commençons par établir la relation qui existe entre les fonction thêta et les courbes tracées sur la surface de Kummer, et nous démontrons, à ce point de vue, un théorème fondamental (n° **16**), qui domine toute la théorie; on en déduit, en particulier, que toutes les courbes tracées sur la surface sont d'ordre pair et que, le long de chacune d'elles, on peut inscrire à la surface de Kummer une surface algébrique ne coupant pas la surface proposée en dehors de la courbe considérée.

Avant de pousser plus loin cette étude, nous donnons un nouvel algorithme, qui nous paraît simple et utile, pour représenter les seize points et les seize plans singuliers; nous en faisons ensuite quelques applications, soit à des problèmes déjà résolus, soit à des problèmes nouveaux, sur certains groupements remarquables des seize coniques de la surface.

Viennent ensuite la classification et la détermination des courbes d'un degré donné qu'on peut tracer sur la surface de Kummer; nous parvenons, sur ce sujet, à des propositions nouvelles remarquablement simples et qui reposent sur ce théorème :

Une courbe quelconque devient l'intersection complète *de la sur-*

face avec une surface algébrique si on lui adjoint 0, 1, 2, 3 *ou* 4 *coniques de la surface de Kummer.*

Ces principes posés, nous étudions avec détails les courbes de degrés 4, 6, 8 et les surfaces inscrites le long de ces courbes, dont les degrés sont 2, 3, 4.

MM. Darboux et Rohn ont établi que la surface de Kummer admet trente séries de quadriques inscrites; nous complétons leurs recherches en étudiant les relations qui existent entre une de ces séries et les vingt-neuf autres; pour les surfaces inscrites d'ordre trois ou quatre, nous donnons une théorie très complète qui conduit à des résultats géométriques simples.

Les Chapitres suivants se rapportent à l'étude des sections de la surface par ses plans tangents : c'est pour nous l'occasion de faire connaître et d'appliquer des formules analytiques importantes, dont plusieurs appartiennent à M. Klein et sont établies ici par une voie nouvelle.

Après un Chapitre consacré aux relations qui lient la surface de Kummer à sa réciproque, nous passons à l'examen du *genre* des courbes tracées sur la surface et à celui des propriétés qui se rattachent à la notion de genre; pour terminer nous étudions des courbes remarquables que nous appelons *univoques,* et qui possèdent d'importantes propriétés géométriques.

La surface de Kummer occupe, parmi les surfaces hyperelliptiques, une place particulière, non seulement parce qu'elle est la plus simple, mais surtout parce que, à un de ses points, correspondent *deux* couples d'arguments hyperelliptiques. Les surfaces les plus générales ne possèdent évidemment pas cette propriété : aussi leurs caractères fondamentaux sont-ils différents de ceux de la surface de Kummer.

Cinq Chapitres sont consacrés à l'étude de ces surfaces et des courbes qu'on peut tracer sur elles; le plus important est celui où se trouve établie la liaison entre les fonctions hyperelliptiques et les surfaces adjointes à une surface donnée.

Grâce à cette liaison, qui est la généralisation directe de notre théorème *fondamental* pour la surface de Kummer, nous donnons un certain nombre de résultats géométriques se rapportant au

nombre des surfaces adjointes, aux surfaces adjointes de contact, aux sections planes, etc.

Les deux derniers Chapitres de cette Section font connaître quelques familles de surfaces et quelques surfaces hyperelliptiques remarquables; nous signalerons, en particulier, une intéressante surface d'ordre huit.

La dernière Partie du Mémoire, fort courte, se rapporte aux surfaces hyperelliptiques telles qu'à chacun de leurs points correspondent deux couples d'arguments : ces surfaces sont représentables point par point sur la surface de Kummer.

Nous donnons un procédé simple pour trouver celles d'entre elles qui sont du quatrième ordre, et à titre d'exemple, nous étudions le lieu des sommets des cônes du second ordre passant par six points, surface remarquable, déjà examinée par plusieurs auteurs et dont M. Darboux, le premier, a signalé la liaison avec la surface de Kummer.

Généralités.

1. Nous appellerons *surface hyperelliptique* toute surface telle que les coordonnées x, y, z d'un de ses points puissent s'exprimer par des fonctions uniformes de deux paramètres ayant quatre paires de périodes.

M. Appell a établi [1], ce qu'on déduit d'ailleurs d'un théorème célèbre de MM. Poincaré et Picard, qu'on peut mettre x, y, z sous la forme

$$x = \frac{\theta_1(u, v)}{\theta_0(u, v)}, \qquad y = \frac{\theta_2(u, v)}{\theta_0(u, v)}, \qquad z = \frac{\theta_3(u, v)}{\theta_0(u, v)},$$

les fonctions θ_h étant uniformes, et vérifiant les relations

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \theta_h(u + 2\pi i, v) &= \theta_h(u, v + 2\pi i) = \theta_h(u, v) \\ \theta_h(u + a, v + b) &= e^{-mu+\alpha}\theta_h(u, v) \\ \theta_h(u + b, v + c) &= e^{-mv+\beta}\theta_h(u, v) \end{aligned} \right\} (h = 0, 1, 2, 3).$$

---

[1] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 4e série, t. VII, p. 211.

Dans ces formules, a, b, c, α, β sont des constantes et *m désigne un entier*. Les quatre paires de périodes de x, y, z sont

$$2\pi i,\ 0;\quad 0,\ 2\pi i;\quad a,\ b;\quad b,\ c.$$

De plus, la partie réelle de $ac - b^2$ doit être positive, pour la convergence des séries obtenues en développant $\theta_h(u, v)$ suivant les puissances de e^u et e^v; quant à l'entier m, il est positif ou négatif selon que la partie réelle de a est négative ou positive.

Dans tout ce qui suit nous supposerons, pour fixer les idées, que la partie réelle de a est négative, et par suite que m est positif.

Nous appellerons *fonctions thêta d'ordre m* les fonctions qui vérifient des relations de la forme (1); nous dirons que deux fonctions thêta de même ordre ont *mêmes multiplicateurs* si α et β sont les mêmes, dans les relations (1), pour ces deux fonctions.

2. On peut préciser davantage la forme des fonctions thêta qui figurent dans l'expression de x, y, z. Soient en effet λ et μ des constantes, posons

$$\theta_h(u + \lambda,\ v + \mu) = \Theta_h(u, v),$$

on aura

$$\begin{aligned}
\Theta_h(u + 2\pi i,\ v) &= \Theta(u,\ v + 2\pi i) = \Theta_h(u,\ v),\\
\Theta_h(u + a,\ v + b) &= e^{-mu+\alpha-m\lambda}\,\Theta_h(u,\ v),\\
\Theta_h(u + b,\ v + c) &= e^{-mv+\beta-m\mu}\,\Theta_h(u,\ v),
\end{aligned}$$

on pourra toujours déterminer λ et μ de manière à vérifier les conditions

$$\alpha - m\lambda = -\tfrac{1}{2}ma,\qquad \beta - m\mu = -\tfrac{1}{2}mc,$$

et l'on aura finalement

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned}
\Theta_h(u + 2\pi i,\ v) &= \Theta_h(u,\ v + 2\pi i) = \Theta_h(u,\ v),\\
\Theta_h(u + a,\ v + b) &= e^{-mu-\frac{ma}{2}}\,\Theta_h(u,\ v)\\
\Theta_h(u + b,\ v + c) &= e^{-mv-\frac{mc}{2}}\,\Theta_h(u,\ v).
\end{aligned}\right.$$

Nous dirons que les fonctions $\Theta(u, v)$, qui satisfont à des relations

de cette forme, sont des fonctions thêta, d'ordre m, *normales, à caractéristique nulle.*

Plus généralement, si une fonction $\Theta(u, v)$ satisfait aux relations

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \Theta(u+2\pi i, v) &= e^{\omega\pi i}\Theta(u, v),\\ \Theta(u, v+2\pi i) &= e^{\omega'\pi i}\Theta(u, v),\\ \Theta(u+a, v+b) &= e^{\theta\pi i}\, e^{-mu-\frac{ma}{2}}\Theta(u, v),\\ \Theta(u+b, v+c) &= e^{\theta'\pi i}\, e^{-mv-\frac{mc}{2}}\Theta(u, v), \end{aligned}\right.$$

où ω, ω', θ, θ' sont des nombres égaux à 0 ou à 1, nous dirons que cette fonction est une fonction Θ (ou thêta) d'ordre m, *normale, et que sa caractéristique est* $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}$.

Les fonctions de caractéristique nulle sont celles pour lesquelles ω, ω', θ, θ' sont tous nuls.

Il y a seize valeurs pour la caractéristique; il y a donc seize systèmes de fonctions Θ normales.

5. Avant de commencer l'étude des surfaces hyperelliptiques, nous ferons connaître quelques propriétés des fonctions Θ normales, sur lesquelles nous aurons souvent à nous appuyer.

Une fonction Θ développée, par la formule de Fourier, en série ordonnée suivant les puissances positives et négatives de e^u et e^v, est de la forme

$$\Theta(u, v) = \sum_{\nu}\sum_{\varpi} A_{\nu\varpi}\, e^{\nu u+\varpi v},$$

la double sommation s'étendant aux valeurs entières de ν et ϖ, de $-\infty$ à $+\infty$ et les coefficients $A_{\nu\varpi}$ étant indépendants de u et v. En écrivant que cette fonction satisfait aux relations (3), on trouve, par un calcul facile et bien connu, qu'elle est fonction linéaire et homogène, à coefficients constants quelconques, des m^2 fonctions $\Theta_{p,q}(u, v)$ ainsi définies

$$\Theta_{p,q}(u, v) = \sum_{\rho}\sum_{\sigma} e^{\left(p+\frac{\omega}{2}+m\rho\right)u+\left(q+\frac{\omega'}{2}+m\sigma\right)v}\, e^{\pi i(\rho\theta+\sigma\theta')}\, e^{\frac{1}{2m}\varphi\left(p+\frac{\omega}{2}+m\rho,\, q+\frac{\omega'}{2}+m\sigma\right)}.$$

Dans le second membre, la double sommation s'étend aux valeurs entières de ρ et σ, de $-\infty$ à $+\infty$; p et q désignent deux entiers quelconques de la série $0, 1, \ldots, m-1$; $\varphi(x, y)$ est la fonction

$$ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

En donnant à p et q tous les systèmes de valeurs dont ils sont susceptibles, on trouve bien m^2 fonctions $\Theta_{p,q}$: toute fonction thêta normale, d'ordre m, de caractéristique $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}$ pourra s'exprimer en fonction linéaire et homogène de ces m^2 fonctions.

4. Il est intéressant, pour ce qui suit, de chercher ce que deviennent les fonctions $\Theta_{p,q}$ quand on y change simultanément les signes de u et de v.

Examinons d'abord, à part, le cas où la caractéristique est nulle : $\omega = \omega' = \theta = \theta' = 0$.

La formule qui donne $\Theta_{p,q}(u, v)$ montre tout d'abord que, si l'on change u et v en $-u$, $-v$, on obtient le même résultat qu'en laissant u et v inaltérés et en changeant simultanément les signes de p, q, ρ, σ : comme ρ et σ varient de $-\infty$ à $+\infty$, on n'altère pas $\Theta_{p,q}$ en changeant ρ en $-\rho$ et σ en $-\sigma$; par suite, on a

$$\Theta_{p,q}(-u, -v) = \Theta_{-p,-q}(u, v).$$

D'ailleurs il est clair que $\Theta_{p,q}$ ne change pas si l'on augmente p ou q de multiples de m; donc

$$\Theta_{p,q}(-u, -v) = \Theta_{m-p,m-q}(u, v).$$

Si m est impair, les deux fonctions $\Theta_{p,q}(u, v)$ et $\Theta_{m-p,m-q}(u, v)$ seront toujours distinctes, hors le cas où p et q sont nuls à la fois : il résulte de cette remarque et de la relation précédente :

1° Que la fonction $\Theta_{00}(u, v)$ et les $\frac{1}{2}(m^2 - 1)$ fonctions

$$\Theta_{p,q}(u, v) + \Theta_{m-p,m-q}(u, v)$$

sont *paires*, c'est-à-dire ne changent pas si l'on remplace u et v par $-u$, $-v$;

2° Que les $\frac{1}{2}(m^2-1)$ fonctions

$$\Theta_{p,q}(u, v) - \Theta_{m-p,m-q}(u, v)$$

sont *impaires*.

Si m est pair, les deux fonctions $\Theta_{p,q}(u, v)$ et $\Theta_{m-p,m-q}(u, v)$ coïncideront pour les quatre système de valeurs

$$p = 0, \quad q = 0; \qquad p = 0, \quad q = \frac{m}{2};$$

$$p = \frac{m}{2}, \quad q = 0; \qquad p = \frac{m}{2}, \quad q = \frac{m}{2},$$

et, par suite, les quatre fonctions $\Theta_{p,q}(u, v)$ correspondantes sont paires.

Les m^2-1 autres fonctions $\Theta_{p,q}$, groupées deux à deux comme plus haut, donnent $\frac{m^2-1}{2}$ fonctions paires et $\frac{m^2-1}{2}$ fonctions impaires.

Ainsi :

Si m est pair, les fonctions thêta d'ordre m, de caractéristique nulle, s'expriment en fonction linéaire et homogène de $\frac{m^2+1}{2}$ fonctions paires et de $\frac{m^2-1}{2}$ fonctions impaires.

Si m est impair, elles s'expriment en fonction de $\frac{m^2+1}{2}$ fonctions paires et de $\frac{m^2-1}{2}$ fonctions impaires.

En particulier : *les fonctions d'ordre deux, de caractéristique nulle, sont toutes paires.*

5. Considérons maintenant le cas des fonctions normales de caractéristique quelconque, non nulle, $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ 0 & 0' \end{vmatrix}$.

Si dans $\Theta_{p,q}(u, v)$ on change u et v en $-u$, $-v$ on voit aisément que cela revient à laisser u et v inaltérés et à changer p et q en $-p-\omega$

et $-q-\omega'$; d'ailleurs changer p en $p+m$ revient à changer ρ en $\rho+1$, et, par suite, à multiplier $\Theta_{p,q}$ par $e^{\pi i\theta}$; de même, changer q en $q+m$ revient à multiplier la fonction par $e^{\pi i\theta'}$: donc on a, en désignant par ε, ε' deux quantités égales à 0 ou à 1, à volonté,

$$\Theta_{p,q}(-u,-v)=\Theta_{\varepsilon m-p-\omega,\varepsilon' m-p-\omega'}(u,v)\,e^{\pi i(\varepsilon\theta+\varepsilon\theta')}.$$

Il résulte de cette relation que :

1° Si m est pair et si ω, ω' ne sont pas nuls à la fois, les indices p et q ne peuvent jamais devenir respectivement égaux à $\varepsilon m-p-\omega$ et $\varepsilon' m-p-\omega'$, quels que soient ε et ε'; en ce cas, aucune des fonctions $\Theta_{p,q}$ n'est paire ou impaire, et la formule précédente montre qu'en associant deux à deux ces fonctions, on obtient $\frac{m^2}{2}$ fonctions paires et $\frac{m^2}{2}$ fonctions impaires.

2° m étant toujours pair, et ω, ω' étant nuls tous deux, les quatre fonctions Θ_{00}, $\Theta_{\frac{m}{2},0}$, $\Theta_{0,\frac{m}{2}}$, $\Theta_{\frac{m}{2},\frac{m}{2}}$ sont paires ou impaires. La première est toujours paire; la deuxième, la troisième et la quatrième sont respectivement paires ou impaires, selon que les nombres θ, θ', $\theta+\theta'$ sont pairs ou impairs : comme θ et θ' ne sont pas nuls à la fois, la caractéristique étant supposée non nulle, deux des quatre fonctions précédentes seront paires, les deux autres seront impaires; les m^2-4 autres fonctions $\Theta_{p,q}$, combinées deux à deux comme plus haut, donnent $\frac{m^2-4}{2}$ fonctions paires et autant de fonctions impaires.

3° Si m est impair, on pourra satisfaire aux relations

$$p=\varepsilon m-p-\omega;\qquad p=\varepsilon' m-q-\omega',$$

d'une seule manière, en posant

$$p=\frac{\omega(m-1)}{2},\qquad \varepsilon=\omega',$$

$$q=\frac{\omega'(m-1)}{2},\qquad \varepsilon'=\omega.$$

Il y aura, pour ces valeurs de p et q, une fonction $\Theta_{p,q}$ qui sera paire

ou impaire, selon que $\omega\theta + \omega'\theta'$ sera pair ou impair. Les autres fonctions $\Theta_{p,q}$, combinées deux à deux, donnent $\frac{m^2-1}{2}$ fonctions paires et autant de fonctions impaires.

En résumé :

Si m est pair, les fonctions Θ normales, d'ordre m, de caractéristique donnée $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}$, *non nulle, s'expriment en fonction linéaire et homogène de $\frac{m^2}{2}$ fonctions paires et de $\frac{m^2}{2}$ fonctions impaires.*

Si m est impair, elles s'expriment en fonction linéaire et homogène de $\frac{m^2+1}{2}$ fonctions paires et de $\frac{m^2-1}{2}$ fonctions impaires, ou de $\frac{m^2-1}{2}$ fonctions paires et de $\frac{m^2+1}{2}$ fonctions impaires, selon que $\omega\theta + \omega'\theta'$ est pair ou impair.

6. En particulier, si m est égal à 1, il résulte, des considérations précédentes, qu'il y a une seule fonction Θ normale, d'ordre 1, ayant une caractéristique donnée; parmi les seize fonctions d'ordre 1 ainsi définies, dix sont paires et six impaires. Les fonctions paires sont celles pour lesquelles $\omega\theta + \omega'\theta'$ est pair; pour les fonctions impaires, $\omega\theta + \omega'\theta'$ est impair.

Nous emploierons, pour représenter les fonctions normales du premier ordre, qui sont les seize fonctions hyperelliptiques bien connues, le caractère $\mathfrak{S}$.

7. Pour compléter ces résultats, nous allons montrer que les fonctions Θ normales paires ou impaires s'annulent pour certaines valeurs remarquables de u et de v.

Considérons un couple de périodes simultanées de u et de v,

$$\alpha = 2h\pi i + \lambda a + \mu b,$$
$$\beta = 2k\pi i + \lambda b + \mu c,$$

h, k, λ, μ étant des entiers.

On a, en désignant par $\Theta(u, v)$ une fonction normale, d'ordre m, de caractéristique $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}$,

$$\Theta(u+\alpha, v+\beta) = \Theta(u, v)\, e^{\pi i(h\omega + k\omega' + \lambda\theta + \mu\theta') - m\lambda u - m\mu v - m\lambda\frac{\alpha}{2} - m\mu\frac{\beta}{2} - m\lambda\mu b - \frac{\lambda(\lambda-1)}{2} ma - \frac{\mu(\mu-1)}{2} mc}.$$

Faisons dans cette relation $u = -\frac{\alpha}{2}$, $v = -\frac{\beta}{2}$; il vient

$$(4) \qquad \Theta\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right) = \Theta\left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\beta}{2}\right) e^{m\pi i(\lambda h + \mu k) + \pi i(h\omega + k\omega' + \lambda\theta + \mu\theta')}.$$

Cette relation montre, si $\Theta(u, v)$ est pair, que $\Theta\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$ sera nul quand la quantité $m(\lambda h + \mu k) + h\omega + k\omega' + \lambda\theta + \mu\theta'$ sera impaire; et, si $\Theta(u, v)$ est impair, que $\Theta\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right)$ sera nul quand la même quantité sera paire.

Il en résulte tout d'abord que, parmi les fonctions Θ normales, d'ordre et de caractéristique donnés, toutes celles qui sont paires, ou bien toutes celles qui sont impaires, s'annulent pour *une demi-période donnée* $\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}$; en second lieu, la parité ou l'imparité du nombre

$$(5) \qquad m(\lambda h + \mu k) + h\omega + k\omega' + \lambda\theta + \mu\theta'$$

ne pouvant dépendre, quand ω, ω', θ, θ', h, k, λ, μ sont donnés, que de la parité ou de l'imparité de m, on voit que si une fonction Θ, normale, paire (ou impaire), d'ordre m, s'annule pour une demi-période, toutes les fonctions paires (ou impaires) de même caractéristique, et dont l'ordre est de même parité que m, s'annuleront pour la même demi-période.

Il suffit donc d'étudier successivement le cas de m pair, et celui de m impair. Or on voit sans difficulté, à l'aide de la formule (4), que :

Si l'ordre m est pair

1° *Les fonctions normales, paires, de caractéristique nulle, ne s'annulent simultanément pour aucune demi-période :*

2° *Les fonctions normales, impaires, de caractéristique nulle, s'annulent pour les seize demi-périodes;*

3° *Les fonctions normales paires, de même caractéristique non nulle, s'annulent pour huit demi-périodes, et les fonctions normales impaires, de même caractéristique, s'annulent pour les huit autres demi-périodes.*

Si l'ordre m est impair,

Les fonctions normales, paires, de caractéristique $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}$, *s'annulent pour six ou dix demi-périodes, et les fonctions normales impaires, de même caractéristique, s'annulent pour les dix ou six autres demi-périodes, selon que* $\omega\theta + \omega'\theta'$ *est pair ou impair.*

Dans ce dernier cas (m impair), la quantité

$$m(\lambda h + \mu k) + h\omega + k\omega' + \lambda\theta + \mu\theta'$$

a la même parité que la quantité

$$\lambda h + \mu k + h\omega + k\omega' + \lambda\theta + \mu\theta',$$

qui peut s'écrire

$$(h + \theta)(\lambda + \omega) + (k + \theta')(\lambda + \omega') - \omega\theta - \omega'\theta'.$$

En particulier, pour $m = 1$, la fonction $\mathfrak{S}(u, v)$, de caractéristique $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}$ s'annulera pour la demi-période

$$h\pi i + \lambda\frac{a}{2} + \mu\frac{b}{2}, \qquad k\pi i + \lambda\frac{b}{2} + \mu\frac{c}{2},$$

si l'on a

$$(6) \qquad (h + \theta)(\lambda + \omega) + (k + \theta')(\mu + \omega') \equiv 1 \qquad (\text{mod } 2)$$

et l'on en déduit qu'une fonction $\mathfrak{S}$ s'annule pour six demi-périodes.

On vérifie, inversement, qu'une même demi-période annule six fonctions $\mathfrak{S}$.

8. Établissons enfin une proposition générale, applicable à toutes les surfaces hyperelliptiques.

D'après le n° **2**, les coordonnées homogènes des points d'une surface hyperelliptique, S, peuvent se mettre sous la forme

$$\rho x_i = \Theta_i(u, v) \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

ρ étant un facteur de proportionnalité et les Θ_i des fonctions thêta normales de même ordre, de caractéristique nulle.

Proposons-nous de chercher la forme de l'équation qui lie u et v le long d'une courbe algébrique quelconque tracée sur S, c'est-à-dire *l'équation hyperelliptique* de cette courbe.

Soit C une courbe algébrique indécomposable sur S; nous pouvons évidemment mener par cette courbe deux surfaces algébriques de même degré, S_1 et S_2, telles que les trois surfaces S, S_1, S_2 n'aient pas d'autre courbe commune que la courbe C; S_1 et S_2 peuvent être, par exemple, les cônes qui projettent C à partir de deux points quelconques de l'espace.

Dans les premiers membres des équations de S_1 et S_2, remplaçons x_1, x_2, x_3, x_4 par $\Theta_1(u, v), \ldots, \Theta_4(u, v)$, et désignons par $f_1(u, v)$ et $f_2(u, v)$ les résultats de ces substitutions.

La fonction $\frac{f_1(u, v)}{f_2(u, v)}$ sera une fonction uniforme, quadruplement périodique de u et v; d'après un théorème connu de M. Poincaré [1], elle pourra se mettre sous la forme $\frac{\varphi_1(u, v)}{\varphi_2(u, v)}$, les fonctions $\varphi_1(u, v)$ et $\varphi_2(u, v)$ étant uniformes, entières, et ne s'annulant simultanément qu'aux points où la fonction $\frac{f_1(u, v)}{f_2(u, v)}$ est indéterminée.

Les arguments u, v d'un point de la courbe C annulent $f_1(u, v)$ et $f_2(u, v)$, d'après la définition même des deux fonctions; mais, en général, le point u, v n'est pas un point d'indétermination de la fonction $\frac{f_1(u, v)}{f_2(u, v)}$. En effet, si $u + du$, $v + dv$ est un point infiniment voisin du

---

[1] *Acta mathematica*, t. II.

point (u, v), sur la courbe C, on a

$$du\frac{\partial f_1}{\partial u} + dv\frac{\partial f_1}{\partial v} = 0,$$

$$du\frac{\partial f_2}{\partial u} + dv\frac{\partial f_2}{\partial v} = 0,$$

ce qui montre qu'au point (u, v) le déterminant

$$\frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial f_2}{\partial v} - \frac{\partial f_1}{\partial v}\frac{\partial f_2}{\partial u}$$

s'annule, et, par conséquent, qu'en ce point la fonction $\frac{f_1(u, v)}{f_2(u, v)}$ n'est pas indéterminée.

Il en résulte que les deux fonctions $\varphi_1(u, v)$ et $\varphi_2(u, v)$ ne s'annulent pas en tous les points de la courbe C.

Or, d'après un théorème de M. Appell [1], l'identité

$$\frac{f_1(u, v)}{f_2(u, v)} = \frac{\varphi_1(u, v)}{\varphi_2(u, v)}$$

entraîne, lorsque φ_1 et φ_2 ne s'annulent simultanément qu'aux points où le premier membre est indéterminé, la relation

$$\frac{f_1(u, v)}{\varphi_1(u, v)} = \frac{f_2(u, v)}{\varphi_2(u, v)} = G(u, v),$$

$G(u, v)$ étant une *fonction entière et uniforme de* u, v.

Les points où $G(u, v)$ s'annule sont les points (de la surface S) où $f_1(u, v)$ et $f_2(u, v)$ s'annulent simultanément, c'est-à-dire les points de la courbe C; on peut donc dire que $G(u, v) = 0$ est l'équation de cette courbe.

Mais à chaque point de S correspondent une infinité de couples d'arguments u, v différant entre eux de multiples des périodes; il faut donc que la fonction $G(u, v)$, quand on augmente u et v de périodes simultanées, se reproduise, à un facteur près. Ce facteur, devant évi-

---

[1] *Journal de Mathématiques*, 4e série, t. VII, p. 183.

demment être entier ainsi que son inverse, sera de la forme $e^{g(u,v)}$, où $g(u, v)$ est une fonction entière.

Or M. Appell a montré [1] qu'une fonction $G(u, v)$, jouissant de ces propriétés, est égale au produit d'une exponentielle, $e^{\lambda(u,v)}$, où $\lambda(u, v)$ est une fonction entière, et d'une fonction entière $\Phi(u, v)$, vérifiant les relations

$$\Phi(u + 2\pi i, v) = \Phi(u, v),$$
$$\Phi(u, v + 2\pi i) = e^{nu}\Phi(u, v),$$
$$\Phi(u + a, v + b) = e^{lu + pv + \frac{na}{2\pi i}v + \alpha}\Phi(u, v),$$
$$\Phi(u + b, v + c) = e^{l'u + p'v + \frac{nc}{2\pi i}v + \beta}\Phi(u, v),$$

où α et β sont des constantes, n, l, p, l', p' des entiers.

Ces conditions entraînent la relation

$$lb + pc + \frac{nac}{2\pi i} = l'a + p'b + \frac{nb^2}{2\pi i} + 2N\pi i,$$

N étant entier.

Mais, si *nous supposons que les quantités* $2\pi i$, a, b, c, $\frac{b^2 - ac}{2\pi i}$ *ne sont liées par aucune relation linéaire et homogène à coefficients entiers*, il faut que la relation précédente soit une identité, c'est-à-dire qu'on ait

$$n = p = l' = 0, \qquad l = p'.$$

La fonction $\Phi(u, v)$ est donc *une fonction thêta* d'ordre $-l$, aux périodes $2\pi i$, 0; 0, $2\pi i$; a, b; b, c et l'équation de la courbe considérée peut s'écrire $\Phi(u, v) = 0$.

Il est clair, *réciproquement*, qu'en égalant à zéro une fonction thêta quelconque, formée avec les périodes précédentes, on obtient l'équation d'une courbe algébrique de la surface S, car le quotient de cette fonction par une fonction thêta de même ordre et de mêmes multiplicateurs est une fonction quadruplement périodique, liée,

---

(1) *Journal de Mathématiques*. 4e série, t. VII, p. 196.

comme on sait, par une relation algébrique à $\frac{x_1}{x_4}$ et $\frac{x_2}{x_4}$; x_1, x_2, x_3, x_4 étant les coordonnées d'un point de S exprimées en fonction de u, v. Ainsi :

Sur une surface dont les coordonnées non homogènes s'expriment par des fonctions uniformes de deux paramètres, u et v, à quatre paires de périodes, l'équation de toute courbe algébrique s'obtiendra en égalant à zéro une fonction thêta, formée avec les mêmes paires de périodes, et réciproquement.

Il est bien entendu, et *cette condition restrictive s'étend à tout le présent Mémoire*, que les quantités $2\pi i$, a, b, c et $\frac{ac-b^2}{2\pi i}$ ne sont liées par aucune relation linéaire et homogène à coefficients entiers.

D'après ce qui précède (n° **2**), l'équation d'une courbe algébrique quelconque sur une surface hyperelliptique pourra se mettre aussi sous la forme

$$\Theta(u-\lambda, v-\mu)=0;$$

λ et μ étant des constantes, et $\Theta(u, v)$ une fonction thêta normale, de caractéristique nulle.

9. *Remarque I.* — Soit $\theta(u, v)$ une fonction thêta d'ordre m, qui se décompose en un produit de deux fonctions entières, $G_1(u, v)$, $G_2(u, v)$: on voit, comme plus haut, que la première de ces fonctions est nécessairement égale au produit d'une fonction thêta, $\theta_1(u, v)$, par une exponentielle, $e^{\lambda(u,v)}$, où $\lambda(u, v)$ est une fonction entière. On a ainsi

$$\theta(u, v)=\theta_1(u, v)e^{\lambda(u,v)}G_2(u, v).$$

Cette identité montre que la fonction entière $e^{\lambda(u,v)}G_2(u, v)$ satisfait, quand on augmente u et v de périodes simultanées, aux relations qui caractérisent les fonctions thêta; c'est donc une fonction thêta, et, par suite,

Si une fonction thêta se décompose en un produit de m fonctions entières, on peut la mettre sous la forme du produit de m fonctions thêta aux mêmes périodes que la première.

10. *Remarque II.* — Si dans une fonction $\theta(u, v)$, d'ordre m, on change u et v en $-u$, $-v$, on obtient une nouvelle fonction

$$\varphi(u, v) = \theta(-u, -v),$$

qui est aussi une fonction thêta, d'ordre m.

On le voit immédiatement à l'aide des relations (1).

Cherchons dans quels cas le quotient $\frac{\theta(u, v)}{\theta(-u, -v)}$ pourra être une fonction entière.

Ce quotient est une fonction qui admet les périodes $2\pi i$, 0; 0, $2\pi i$, et qui se reproduit multiplié par une constante quand on augmente u et v des périodes a, b ou b, c; il en résulte aisément, M. Appell a d'ailleurs établi ce fait [1], que le quotient considéré est de la forme $Ae^{p'u+q'v}$, p' et q' désignant des entiers, et A une constante.

On a ainsi

$$\theta(u, v) = Ae^{p'u+q'v}\theta(-u, -v).$$

Si l'on change dans cette équation u, v en $-u$, $-v$, on trouve

$$\theta(-u, -v) = Ae^{-p'u-q'v}\theta(u, v),$$

d'où

$$A^2 = 1, \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad A = \pm 1.$$

Ces résultats montrent que la fonction

$$e^{-\frac{p'}{2}u-\frac{q'}{2}v}\theta(u, v)$$

est *paire ou impaire*, selon que A est égal à $+1$ ou à -1.

Ainsi la condition nécessaire et suffisante pour que le quotient $\frac{\theta(u, v)}{\theta(-u, -v)}$, et aussi son inverse, soit une fonction entière, est que $\theta(u, v)$ soit une fonction paire ou impaire, ou le devienne quand on la multiplie par une exponentielle de la forme $e^{-\left(\frac{p'}{2}u+\frac{q'}{2}v\right)}$.

---

[1] *Journal de Mathématiques*, 4e série, t. VII, p. 195.

11. *Remarque III.* — De la même manière, si λ, μ, λ_0, μ_0 sont des constantes, on voit que le quotient $\varphi(u, v) = \frac{\Theta(u-\lambda, v-\mu)}{\Theta_0(u-\lambda_0, v-\mu_0)}$, où Θ et Θ_0 désignent deux fonctions thêta de même ordre m, à caractéristique nulle, ne peut être entier (ainsi que son inverse), que s'il est égal à une exponentielle, Ae^{hu+kv}. Les constantes h et k sont des entiers, puisque $\varphi(u, v)$ admet la période $2\pi i$ par rapport à u et à v; on a, de plus, d'après (2),

$$\varphi(u+a, v+b) = e^{m(\lambda-\lambda_0)}\varphi(u, v), \qquad \varphi(u+b, v+c) = e^{m(\mu-\mu_0)}\varphi(u, v),$$

d'où

$$ha + kb = m(\lambda - \lambda_0) + 2\rho\pi i, \qquad hb + kc = m(\mu - \mu_0) + 2\sigma\pi i,$$

ρ et σ étant entiers. Ces conditions peuvent s'écrire

$$m(\lambda - \lambda_0) \equiv 0, \qquad m(\mu - \mu_0) \equiv 0 \qquad \text{(mod. périodes)}.$$

Il résulte de là que si λ, μ, λ_0, μ_0 sont liés par deux relations de cette forme, la courbe qui, sur une surface hyperelliptique quelconque, a pour équation $\Theta_0(u-\lambda_0, v-\mu_0) = 0$, où $\Theta_0(u, v)$ est une fonction thêta donnée d'ordre m, à caractéristique nulle, pourra aussi être représentée par une équation de la forme $\Theta(u-\lambda, v-\mu) = 0$, où $\Theta(u, v)$ est une fonction de même ordre et de même caractéristique que $\Theta_0(u, v)$.

DEUXIÈME PARTIE.

SURFACE DE KUMMER.

CHAPITRE I.

Premières propriétés.

12. Si les coordonnées x, y, z d'un point d'une surface sont exprimables par des fonctions uniformes de deux paramètres, u et v, à quatre

paires de périodes, on peut poser, d'après ce qui a été dit au n° 2, en introduisant, à la place de x, y, z, des coordonnées homogènes, $\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}$,

$$(7) \qquad \rho x_i = \Theta_i(u, v) \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

ρ étant le facteur de proportionnalité et les $\Theta_i(u, v)$ des fonctions Θ normales, d'un même ordre m, à caractéristique nulle.

Il existe m^2 fonctions Θ_i, linéairement indépendantes; la première surface hyperelliptique que l'on rencontrera s'obtiendra donc en faisant $m = 2$: les quatre fonctions Θ_i sont alors quatre fonctions *normales d'ordre* 2, linéairement distinctes; de plus, et c'est là un point fondamental, elles sont toutes *paires,* puisque, d'après le n° 4, les quatre fonctions normales du second ordre, à l'aide desquelles s'expriment linéairement toutes les autres, sont des fonctions paires. Il en résulte qu'à un point de la surface (7) correspondent, abstraction faite des multiples des périodes, deux couples d'arguments (u, v) et $(-u, -v)$.

La surface ainsi définie est *une surface de Kummer :* le mode de représentation indiqué est en effet le même, comme on s'en assure aisément, que celui indiqué par M. Weber au tome 84 du *Journal de Crelle*. M. Weber exprime les coordonnées homogènes d'un point de la surface de Kummer par des fonctions linéaires des carrés de quatre fonctions ϑ normales du premier ordre, de caractéristiques différentes; or il est clair que ces carrés sont des fonctions Θ, du second ordre, normales et à caractéristique nulle. Les deux modes de représentation sont donc identiques [1].

On peut d'ailleurs vérifier directement que la surface définie par les équations (7), où les Θ sont des fonctions normales du second ordre, est une surface d'ordre 4; car, d'après un théorème de M. Poincaré, qui est fondamental dans nos recherches actuelles, deux fonctions Θ, d'ordres m et n respectivement, ont $2mn$ zéros communs

---

[1] Weber, *Journal de Crelle,* t. 84. — Cayley, *Journal de Crelle,* t. 83, p. 210.

(les solutions qui ne diffèrent que de périodes étant regardées comme identiques) [1]. Or les arguments des points communs à la surface (7) et à une droite, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, par exemple, vérifient les équations

$$\Theta_1(u, v) = 0, \qquad \Theta_2(u, v) = 0,$$

qui ont un nombre de solutions communes égal à huit, d'après la formule de M. Poincaré; mais ces huit solutions sont deux à deux égales et de signes contraires, de la forme (u, v) et $(-u, -v)$, puisque les fonctions Θ_i sont paires, et, par suite, il ne leur correspond que quatre points de la surface. Celle-ci est donc bien du quatrième ordre.

13. Les *seize points doubles* de la surface correspondent aux valeurs de u et v égales à des moitiés de périodes simultanées, ou, en langage plus court, à des demi-périodes : en effet, si l'on développe $\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}$, suivant les puissances croissantes de u et v, ces développements manqueront de termes du premier ordre, puisque les fonctions considérées sont paires. Il en résulte que le point $u = 0$, $v = 0$ est un point double, et un raisonnement tout pareil établit la proposition pour les quinze autres demi-périodes.

14. *Courbes tracées sur la surface.* — D'après le n° **8**, sur la surface de Kummer, comme sur toute surface hyperelliptique, l'équation d'une courbe algébrique s'obtient en égalant à zéro une fonction thêta, quelconque, $\theta(u, v)$.

Or, soit $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ l'équation d'une surface passant par la courbe *indécomposable* de la surface de Kummer, $\theta(u, v) = 0$; désignons par $f(u, v)$ ce que devient f quand on y remplace x_1, x_2, x_3, x_4 par $\Theta_1(u, v), \ldots, \Theta_4(u, v)$.

Il est clair que $f(u, v)$ est divisible par $\theta(u, v)$, le quotient étant une fonction thêta (n° **9**), on a ainsi

$$f(u, v) = \theta(u, v)\theta_1(u, v).$$

---

[1] *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. X.

Mais la fonction $f(u, v)$ étant paire, on a identiquement

$$\theta(u, v)\theta_1(u, v) = \theta(-u, -v)\theta_1(-u, -v).$$

Si le quotient $\frac{\theta(u, v)}{\theta(-u, -v)}$ n'est pas une fonction entière, cette identité montre que $\theta_1(u, v)$ sera divisible par $\theta(-u, -v)$, le quotient étant entier; on aura ainsi

$$f(u, v) = \theta(u, v)\theta(-u, -v)\theta_2(u, v),$$

θ_2 étant une fonction thêta.

Si le quotient $\frac{\theta(u, v)}{\theta(-u, -v)}$ est entier, ce résultat n'est plus vrai; mais alors la fonction $\theta(u, v)$, multipliée par une exponentielle

$$e^{-\left(\frac{p'}{2}u + \frac{q'}{2}v\right)},$$

est égale à une fonction $\theta'(u, v)$, paire ou impaire (n° **10**).

Il résulte de cette discussion que :

1° Dans le premier cas, l'équation de la courbe considérée

$$\theta(u, v) = 0$$

doit être en réalité remplacée par l'équation

$$\theta(u, v)\theta(-u, -v) = 0;$$

2° Dans le second cas, la courbe a une équation de la forme

$$\theta'(u, v) = 0,$$

$\theta'(u, v)$ étant une fonction *paire ou impaire*, qui satisfait aux mêmes équations fondamentales que les fonctions thêta, avec cette différence, due au facteur $e^{-\frac{p'}{2}u - \frac{q'}{2}v}$, que, si l'on augmente u ou v de $2\pi i$, elle se reproduit multipliée par ± 1.

En d'autres termes, si l'on observe que $\theta(u, v)\,\theta(-u, -v)$ est toujours *pair*, on voit que, pour obtenir toutes les courbes algébriques de la surface de Kummer, il suffira d'égaler à zéro les fonctions $\theta(u, v)$ satisfaisant aux conditions

$$\left.\begin{aligned}
\theta(u, v) &= \varepsilon\,\theta(-u, -v)\\
\theta(u+2\pi i, v) &= \varepsilon_1\,\theta(u, v),\\
\theta(u, v+2\pi i) &= \varepsilon_2\,\theta(u, v),
\end{aligned}\right\}\ (\varepsilon, \varepsilon_1, \varepsilon_2 = \pm 1),$$

$$\theta(u+a, v+b) = e^{-pu+\alpha}\,\theta(u, v),$$

$$\theta(u+b, v+c) = e^{-pv+\beta}\,\theta(u, v).$$

Si dans l'avant-dernière de ces relations on change u et v en $-u$, $-v$, en tenant compte de la première, il vient

$$\theta(u-a, v-b) = e^{pu+\alpha}\,\theta(u, v);$$

remplaçant u et v par $u+a$, $v+b$, on trouve

$$\theta(u+a, v+b) = e^{-pu-pa-\alpha}\,\theta(u, v);$$

d'où l'on conclut, par comparaison,

$$e^{2\alpha} = e^{-pa}; \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad e^{\alpha} = \pm e^{-\frac{pa}{2}}.$$

De même on aurait $e^{\beta} = \pm e^{-\frac{pc}{2}}$, et, par suite, les équations auxquelles satisfait la fonction θ deviennent

$$\theta(u+2\pi i, v) = \pm\,\theta(u, v),$$

$$\theta(u, v+2\pi i) = \pm\,\theta(u, v),$$

$$\theta(u+a, v+b) = \pm e^{-pu-\frac{pa}{2}}\,\theta(u, v),$$

$$\theta(u+b, v+c) = \pm e^{-pv-\frac{pc}{2}}\,\theta(u, v).$$

En d'autres termes, $\theta(u, v)$ est une fonction Θ, *normale*, d'ordre p, à caractéristique quelconque (n° **2**), paire ou impaire, et, par suite,

L'équation d'une courbe algébrique tracée sur la surface de Kummer s'obtient en égalant à zéro une fonction Θ normale, d'ordre et de caractéristique quelconques, paire ou impaire; et réciproquement.

15. On en déduit de suite une conséquence intéressante. Soit en effet p l'ordre de la fonction Θ considérée, pour avoir le degré de la courbe correspondante, coupons-la par un plan, $x_2 = 0$, par exemple; les arguments des points communs vérifient les équations

$$\Theta(u, v) = 0, \qquad \Theta_2(u, v) = 0.$$

Elles ont, d'après le théorème de M. Poincaré, $2.2p = 4p$ solutions communes, qui sont deux à deux égales et de signes contraires, puisque Θ_2 est une fonction paire, et que Θ est une fonction paire ou impaire. Le nombre des points communs au plan et à la courbe est donc $\frac{1}{2}4p$, c'est-à-dire $2p$, et la courbe est de degré $2p$. Ainsi :

Toutes les courbes algébriques tracées sur la surface de Kummer sont de degré pair.

16. *Intersection complète de la surface de Kummer et d'une surface algébrique;* THÉORÈME FONDAMENTAL. — L'intersection complète de la surface de Kummer et d'une surface algébrique d'ordre p,

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

aura pour équation hyperelliptique

$$f(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4) = 0,$$

les Θ_i étant toujours des fonctions normales du second ordre, à caractéristique nulle.

Le premier membre de cette équation est une fonction Θ, normale, paire, d'ordre $2p$, à caractéristique nulle.

Or la *réciproque* de cette proposition est vraie, et c'est là un fait capital pour l'étude des courbes tracées sur la surface de Kummer.

Soit, en effet, $\Theta(u, v)$ une fonction normale, paire, d'ordre $2p$, à caractéristique nulle; nous allons établir que la courbe $\Theta(u, v) = 0$ est l'intersection complète de la surface de Kummer avec une surface algébrique d'ordre p.

Toutes les fonctions telles que Θ peuvent (n° 4) s'exprimer linéairement à l'aide de $2p^2 + 2$ d'entre elles; or toute fonction de la forme

$$\Theta_1^\alpha \Theta_2^\beta \Theta_3^\gamma \Theta_4^\delta, \tag{8}$$

où $\Theta_1, \ldots, \Theta_4$ ont la signification indiquée tout à l'heure, est une fonction normale, à caractéristique nulle, d'ordre $2(\alpha + \beta + \gamma + \delta)$; de plus, c'est une fonction paire, puisque les Θ_i sont pairs. Si l'on pose $\alpha + \beta + \gamma + \delta = p$, ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ étant bien entendu des entiers non négatifs), on obtient ainsi, en donnant à ces nombres toutes les valeurs compatibles avec les conditions précédentes, des fonctions $\Theta_1^\alpha \Theta_2^\beta \Theta_3^\gamma \Theta_4^\delta$ en nombre égal à

$$\frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{6}.$$

Mais toutes les fonctions thêta ainsi formées ne sont pas linéairement distinctes. En effet, $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4$ sont liées par une équation du quatrième ordre, $K = 0$, celle de la surface de Kummer représentée par les équations (7); on a donc

$$0 = K(\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4)\varphi_{p-4},$$

φ_{p-4} étant une fonction homogène quelconque entière, d'ordre $p - 4$, de $\Theta_1, \ldots, \Theta_4$. Cette fonction renferme $\frac{(p-3)(p-2)(p-1)}{6}$ coefficients arbitraires; comme le produit $K\varphi_{p-4}$ est une somme de fonctions thêta, de la forme (8), où $\alpha + \beta + \gamma + \delta = p$, il en résulte que les fonctions de cette forme sont liées par $\frac{(p-3)(p-2)(p-1)}{6}$ relations linéaires. Il est clair, d'ailleurs, que l'on a ainsi obtenu toutes

les relations linéaires existant entre ces fonctions, car toute relation homogène, entière, de degré p entre Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4 a nécessairement son premier membre divisible par K. Par suite, le nombre des fonctions $\Theta_1^\alpha\Theta_2^\beta\Theta_3^\gamma\Theta_4^\delta$ (où $\alpha+\beta+\gamma+\delta=p$), qui sont linéairement indépendantes, c'est-à-dire, à l'aide desquelles on peut exprimer linéairement les autres, est égal à

$$\tfrac{1}{6}(p+1)(p+2)(p+3)-\tfrac{1}{6}(p-3)(p-2)(p-1),$$

ou

$$2p^2+2.$$

Or ce nombre est précisément égal à celui des fonctions thêta normales, paires, d'ordre $2p$, à caractéristique nulle, et linéairement indépendantes, à l'aide desquelles on peut exprimer toutes les autres; comme d'ailleurs les fonctions $\Theta_1^\alpha\Theta_2^\beta\Theta_3^\gamma\Theta_4^\delta$, $(\alpha+\beta+\gamma+\delta=p)$ sont des fonctions thêta de cette catégorie, on voit que toute fonction Θ normale, paire, d'ordre $2p$, à caractéristique nulle, s'exprimera linéairement à l'aide des fonctions $\Theta_1^\alpha\Theta_2^\beta\Theta_3^\gamma\Theta_4^\delta$; c'est-à-dire sera une fonction entière, homogène, d'ordre p, de Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4,

$$\Theta=\varphi_p(\Theta_1,\ \ldots,\ \Theta_4).$$

En d'autres termes, la courbe $\Theta(u, v)=0$ sera l'intersection *complète* de la surface de Kummer avec la surface algébrique d'ordre p, $\varphi_p(x_1, x_2, x_3, x_4)=0$.

Nous pouvons donc énoncer ce théorème :

L'équation de la courbe complète, d'ordre $4p$, commune à la surface de Kummer et à une surface algébrique d'ordre p, s'obtient en égalant à zéro une fonction Θ normale, paire, d'ordre $2p$, à caractéristique nulle.

Réciproquement, *la courbe qu'on définit, en égalant à zéro une telle fonction Θ, est l'intersection complète de la surface de Kummer et d'une surface d'ordre p.*

17. *Corollaire.* — Le premier membre de l'équation d'une courbe

algébrique sur la surface de Kummer étant (n° **14**) une fonction thèta d'ordre p, normale, paire ou impaire son carré est toujours une fonction Θ normale, d'ordre $2p$, *de caractéristique nulle et paire;* il peut donc s'exprimer en fonction entière, homogène, d'ordre p, de $\Theta_1, \ldots, \Theta_4$; soit $\varphi_p(\Theta_1, \ldots, \Theta_4)$, et, par suite, la surface

$$\varphi_p(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

est circonscrite à la surface de Kummer le long de la courbe considérée, et ne la coupe pas en dehors de cette courbe.

Donc :

Le long de toute courbe algébrique tracée sur la surface de Kummer et de degré $2p$, on peut circonscrire à cette surface une surface algébrique de degré p, ne la coupant pas en dehors de la courbe considérée [1].

Avant d'aller plus loin dans l'étude des courbes algébriques de la surface de Kummer, il est nécessaire de présenter quelques remarques sur les points singuliers et sur les seize coniques de la surface; les propriétés des uns et des autres sont bien connues, mais nous devons exposer ici un algorithme nouveau destiné à représenter les éléments de la configuration de Kummer et dont l'utilité sera grande dans nos recherches ultérieures.

Points et plans singuliers.

18. Les courbes du degré le moins élevé qu'on peut tracer sur la surface de Kummer sont des coniques; on obtient seize coniques en égalant à zéro les seize fonctions $\mathfrak{S}$ normales du premier ordre, puisque la courbe obtenue en égalant à zéro une fonction normale, paire ou impaire, d'ordre p, est d'ordre $2p$ (n° **15**).

---

[1] Cette propriété curieuse n'appartient évidemment qu'à des surfaces exceptionnelles; en dehors de la surface de Kummer, nous ne connaissons, pour la posséder, que les cônes du second ordre.

Chaque fonction ϑ s'annulant pour six demi-périodes, chaque conique passe par six points singuliers.

D'après le théorème du n° **17**, le plan de chaque conique touche la surface le long de la conique; les plans des seize coniques seront dits *plans singuliers*.

On peut donner, pour représenter les seize points et les seize plans singuliers, un *algorithme* qui jouit de propriétés remarquables.

Écrivons les deux Tableaux identiques :

$$\begin{array}{cccc} & \text{I.} & & \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} & \text{II.} & & \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

et numérotons les colonnes, dans le premier de 1 à 4, dans le second de 1′ à 4′, à partir de la gauche. Soit une fonction ϑ du premier ordre, de caractéristique $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ 0 & 0' \end{vmatrix}$, par exemple $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$; nous prendrons la première colonne de cette figure, soit la colonne $\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}$, dans le Tableau I, où elle a le numéro d'ordre 2; de même la seconde colonne, $\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}$, a le numéro d'ordre 1′ dans le tableau II; nous représenterons alors la fonction ϑ de caractéristique $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ par le symbole 21′. Inversement, un symbole, tel que 34′ par exemple, représente la fonction de caractéristique $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$.

On peut donner un symbole analogue pour représenter les demi-périodes. Soit, par exemple, la demi-période

$$h\pi i + \lambda a + \mu b; \quad k\pi i + \lambda b + \mu c.$$

où

$$h = 0, \qquad k = 1, \qquad \lambda = 1, \qquad \mu = 1.$$

Nous écrirons le Tableau

$$\begin{vmatrix} 1+\lambda & 1+\mu \\ 1+h & 1+k \end{vmatrix},$$

qui représentera la demi-période; nous négligerons, dans chaque terme $1+\lambda, \ldots, 1+k$, les multiples de 2, en sorte que, dans l'exemple considéré, le Tableau s'écrit

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix},$$

et nous donnerons à la demi-période le symbole $(34')$, 3 étant l'ordre de la première colonne $\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}$ dans le Tableau I, et $4'$ celui de la seconde, $\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \end{smallmatrix}$, dans le Tableau II. Inversement, un symbole, tel que $(13')$, représentera la demi-période pour laquelle on a

$$1+\lambda \equiv 1, \quad 1+h \equiv 1, \quad 1+\mu \equiv 0, \quad 1+k \equiv 1 \qquad (\text{mod } 2).$$

Pour distinguer des symboles des $\mathfrak{S}$ les symboles des demi-périodes, nous mettons ces derniers entre parenthèses.

Cela posé, je dis que les six demi-périodes qui annulent une fonction $\mathfrak{S}$, de symbole $\alpha\alpha'$, ont les symboles qu'on obtient en faisant suivre le chiffre α des trois chiffres accentués de la série 1, 2, 3, 4, qui diffèrent de α, et en faisant précéder le chiffre α' des trois chiffres de cette série qui diffèrent de α' : ainsi les six demi-périodes annulant $12'$ sont $(11')$, $(13')$, $(14')$ et $(22')$, $(32')$, $(42')$.

Nous savons, en effet, que les demi-périodes qui annulent la fonction $\mathfrak{S}$ de caractéristique $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}$ sont données par la congruence (n° **7**, équation 6)

$$(h+\theta)(\lambda+\omega)+(k+\theta')(\mu+\omega') \equiv 1 \qquad (\text{mod } 2).$$

Cette congruence admet six solutions, dont l'une, par exemple, est

$$h+\theta \equiv 0, \quad \lambda+\omega \equiv 0, \quad k+\theta' \equiv 1, \quad \mu+\omega' \equiv 1 \qquad (\text{mod } 2).$$

Le Tableau qui caractérise la demi-période correspondante, à savoir

$$\begin{vmatrix} 1+\lambda & 1+\mu \\ 1+h & 1+k \end{vmatrix}, \quad \text{est alors} \quad \begin{vmatrix} 1+\omega & \omega' \\ 1+\theta & \theta' \end{vmatrix},$$

en négligeant dans chaque terme les multiples de 2; pour les cinq autres solutions, on obtient de même les cinq Tableaux

$$\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ 1+\theta & \theta' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1+\omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \omega & 1+\omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & 1+\theta' \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \omega & 1+\omega' \\ \theta & 1+\theta' \end{vmatrix}.$$

On voit que, dans trois de ces six Tableaux, la première colonne est $\begin{smallmatrix}\omega\\ \theta\end{smallmatrix}$, et que, dans les trois autres, la seconde colonne est $\begin{smallmatrix}\omega'\\ \theta'\end{smallmatrix}$. Dans les Tableaux qui commencent par la colonne $\begin{smallmatrix}\omega\\ \theta\end{smallmatrix}$, la seconde colonne prend trois des formes $\begin{smallmatrix}0\\0\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}$, $\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}$, la forme exceptée étant $\begin{smallmatrix}\omega'\\ \theta'\end{smallmatrix}$. On peut faire la même remarque pour les Tableaux qui se terminent par la colonne $\begin{smallmatrix}\omega'\\ \theta'\end{smallmatrix}$, et ces deux remarques démontrent la règle énoncée : si, en effet, p est l'ordre de la colonne $\begin{smallmatrix}\omega\\ \theta\end{smallmatrix}$ dans le Tableau I; q' celui de la colonne $\begin{smallmatrix}\omega'\\ \theta'\end{smallmatrix}$ dans le Tableau II, la fonction $\mathfrak{S}$ considérée aura le symbole pq', et, des six demi-périodes qui l'annulent, trois auront des symboles commençant par p, trois des symboles finissant par q', le symbole (pq') ne devant pas figurer.

On verrait de même qu'on obtient les symboles des six fonctions $\mathfrak{S}$ s'annulant pour la demi-période (pq') en faisant suivre p des trois chiffres accentués de la série 1, 2, 3, 4, qui diffèrent de q' et en faisant précéder q' des trois chiffres de cette série qui diffèrent de p : ainsi la demi-période $(12')$ annule les six $\mathfrak{S}$: $11'$, $13'$, $14'$ et $22'$, $32'$, $42'$.

Il est même inutile de faire de nouveaux calculs pour le vérifier, car, d'après ce qui précède, les fonctions pq' et sr' s'annulent pour la demi-période (pr') si $r' \gtrless q'$ et $p \gtrless s$.

On voit sans difficulté que les six fonctions $\mathfrak{S}$ *impaires*, c'est-à-dire celles pour lesquelles $\omega\theta + \omega'\theta'$ est impair, ont pour symboles

$$12', \quad 13', \quad 14', \quad 21', \quad 31', \quad 41';$$

ce sont les six symboles qui contiennent une et une seule fois le chiffre 1, accentué ou non.

19. Revenons maintenant à la surface de Kummer; nous représenterons un plan singulier par le symbole de la fonction ϑ correspondante, et un point singulier par celui de la demi-période qui donne ses arguments : nous arrivons ainsi à l'algorithme suivant, qui peut être présenté indépendamment de toute considération analytique :

Soient 1, 2, 3, 4 *et* 1′, 2′, 3′, 4′ *deux séries de quatre caractères; désignons par* α *un caractère quelconque de la première série, par* β, γ, δ *les trois autres; par* α' *un caractère de la seconde, par* β', γ', δ' *les trois autres.*

Les seize symboles $\alpha\alpha'$ *représenteront les seize plans singuliers, et les seize symboles* $(\alpha\alpha')$ *les seize points singuliers de la surface de Kummer, de telle façon :*

1° *Que les six points singuliers contenus dans le plan* $\alpha\alpha'$ *soient*

$$(\alpha\beta),\quad (\alpha\gamma),\quad (\alpha\delta),\quad (\beta\alpha'),\quad (\gamma\alpha')\quad (\delta\alpha');$$

2° *Que les six plans singuliers passant par le point* $(\alpha\alpha')$ *soient*

$$\alpha\beta,\qquad \alpha\gamma,\qquad \alpha\delta,\qquad \beta\alpha',\qquad \gamma\alpha',\qquad \delta\alpha'.$$

Cette notation a, sur celle de M. Weber [1], l'avantage d'être symétrique par rapport aux points ou aux plans singuliers de la surface de Kummer; elle est, de plus, réciproque par rapport aux points et aux plans singuliers. Nous verrons enfin qu'elle se rattache étroitement à la notation proposée par Hesse pour les bitangentes d'une quartique plane.

On vérifie immédiatement, à l'aide de notre notation, que deux plans singuliers ont en commun deux points singuliers, et que par deux points singuliers passent deux plans singuliers.

---

[1] Weber, *Journal de Crelle*, t. 84.

Groupes remarquables de points et de plans singuliers.

20. Il existe des groupes remarquables de points et de plans singuliers, que les travaux antérieurs de divers géomètres ont fait connaître ([1]), mais sur lesquels nous avons à revenir en vue de nos recherches; l'algorithme nouveau va nous permettre de les retrouver de suite.

I. *Groupes de Rosenhain.* — Ce sont des groupes de quatre plans singuliers formant un tétraèdre ayant pour sommets quatre points singuliers.

On trouve que les symboles des quatre plans d'un groupe sont de quatre types :

1°	$\alpha\alpha'$,	$\alpha\beta'$,	$\alpha\gamma'$,	$\alpha\delta'$;	ce type donne	4 tétraèdres,
2°	$\alpha\alpha'$,	$\beta\alpha'$,	$\gamma\alpha'$,	$\delta\alpha'$;	»	4 »
3°	$\alpha\alpha'$,	$\alpha\beta'$,	$\beta\gamma'$,	$\beta\delta'$;	»	36 »
4°	$\alpha\alpha'$,	$\beta\alpha'$,	$\gamma\beta'$,	$\delta\beta'$;	»	36 »

Il y a donc, en tout, 80 groupes ou tétraèdres de Rosenhain. Au point de vue géométrique, il n'y a aucune différence entre les groupes des divers types.

Si, imitant la méthode proposée par M. Cayley pour la représentation graphique des bitangentes d'une quartique plane, nous convenons de disposer les caractères α', β', γ', δ' sur une ligne horizontale, et les caractères α, β, γ, δ sur une ligne horizontale au-dessous de la première, et si nous représentons le plan $\alpha\alpha'$ par la droite qui joint les caractères α et α', les symboles graphiques des groupes de Rosenhain

---

([1]) Rosenhain, Mémoires couronnés *Savants étrangers*, t. XI; Weber, *Journal de Crelle*, t. 84; Göpel, *Journal de Crelle*, t. 35; Krazer, *Theorie der zweifach unendlichen Thetareihen* (Teubner, 1882); Reichardt, *Darstellung der Kummerschen Fläche*, ... (*Nova Acta de l'Académie Leop.-Carol. de Halle*, t. L.)

sont [1]

$\mathbb{V}$ et $\mathbb{A}$ pour les types 1° et 2°,

$\mathbb{V}\mathbb{V}$ et $\mathbb{A}\mathbb{A}$ pour les types 3° et 4°.

21. Le produit des quatre fonctions $\mathfrak{S}$ qui correspondent aux plans d'un groupe de Rosenhain est évidemment une fonction Θ normale, d'ordre quatre : je dis que c'est une fonction *impaire*, de caractéristique *nulle*.

Elle est impaire, car la représentation graphique montre que les quatre symboles des plans d'un groupe renferment un nombre impair de fois, au total, un symbole de la première catégorie, α, par exemple, et un symbole de la seconde β', par exemple : en particulier, ils renferment un nombre impair de fois, au total, les symboles 1 et 1'; par suite, sur les quatre fonctions $\mathfrak{S}$ correspondantes, une ou trois sont impaires (n° **18**), et le produit est impair.

Pour étudier la caractéristique, considérons, d'une manière plus générale, le produit d'un nombre quelconque de $\mathfrak{S}$, $\alpha\alpha'$, $\alpha\beta'$, ..., $\gamma\delta'$. Les nombres qui composent la caractéristique de ce produit sont évidemment

$$\Omega \equiv \Sigma\omega, \qquad \Omega' \equiv \Sigma\omega', \qquad \Theta \equiv \Sigma\theta, \qquad \Theta' \equiv \Sigma\theta' \pmod 2,$$

les sommes s'étendant aux nombres ω, ω', θ, θ', qui correspondent aux fonctions $\mathfrak{S}$ du produit considéré. Or le premier caractère, α, du symbole $\alpha\alpha'$ d'une fonction $\mathfrak{S}$, représente, dans notre notation, la première colonne $\begin{smallmatrix}\omega\\ \theta\end{smallmatrix}$ de la caractéristique; de même α' représente la colonne $\begin{smallmatrix}\omega'\\ \theta'\end{smallmatrix}$; il en résulte sans difficulté, si l'on se reporte aux Tableaux I et II du n° **18**, la conséquence suivante.

Écrivons à la suite les uns des autres les symboles $\alpha\alpha'$, $\alpha\beta'$, ..., $\gamma\delta'$ des $\mathfrak{S}$ dont on considère le produit, et regardons cette expression comme un produit algébrique auquel nous appliquerons les règles du calcul algébrique; nous aurons ainsi

$$\alpha\alpha' . \alpha\beta \ldots \gamma\delta' = 1^h 2^k 3^l 4^m . 1'^{h'} 2'^{k'} 3'^{l'} 4'^{m'},$$

[1] D'après cette convention, les six plans singuliers qui passent par un même point auront pour symbole $\mathbb{A}\mathbb{V}$.

$h, k, \ldots, m'$ étant des entiers positifs : les nombres $\Omega, \Omega', \Theta, \Theta'$ seront donnés par les relations

$$\Omega \equiv h + k, \quad \Omega' \equiv h' + k', \quad \Theta \equiv h + l, \quad \Theta' \equiv h' + l' \pmod 2.$$

Le produit considéré aura donc sa caractéristique nulle si les nombres h, k, l sont de même parité, ainsi que les nombres h', k', l'.

Dans le cas où le produit comprend un nombre pair de fonctions ϑ, cette règle se simplifie et il n'est pas besoin d'introduire les caractères 1, 2, 3, 4 à la place des $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. En ce cas, en effet, les nombres (égaux entre eux), $h + k + l + m$ et $h' + k' + l' + m'$ sont pairs; la condition pour que le produit étudié soit de caractéristique nulle est donc que les nombres h, k, l, m soient de même parité, ainsi que les nombres h', k', l', m' Or cette condition est symétrique par rapport aux caractères 1, 2, 3, 4 et par rapport aux caractères 1′, 2′, 3′, 4′; il en résulte que, si l'expression $\alpha\alpha'.\alpha\beta'\ldots\gamma\delta'$ prend, par l'application des règles du calcul algébrique, la forme $\alpha^h\beta^k\gamma^l\delta^m.\alpha'^{h'}\beta'^{k'}\gamma'^{l'}\delta'^{m'}$, la condition nécessaire et suffisante pour que le produit considéré soit de caractéristique nulle est que les nombres h, k, l, m soient de même parité, ainsi que h', k', l', m', sans qu'on ait besoin de savoir à quels caractères des séries 1, 2, 3, 4 et 1′, 2′, 3′, 4′ correspondent les caractères $\alpha, \beta, \ldots, \delta'$.

Cette observation montre que le produit des quatre ϑ d'un groupe de Rosenhain est une fonction de caractéristique nulle, car on a, pour les groupes du premier type,

$$\alpha\alpha'.\alpha\beta'.\alpha\gamma'.\alpha\delta' = \alpha^4\alpha'\beta'\gamma'\delta',$$

et pour ceux du troisième,

$$\alpha\alpha'.\alpha\beta'.\beta\gamma'.\beta\delta' = \alpha^2\beta^2\alpha'\beta'\gamma'\delta';$$

de même pour les groupes des types 2° et 4°.

Le produit des quatre ϑ d'un groupe de Rosenhain étant une fonction normale, d'ordre quatre, impaire et de caractéristique nulle, les résultats du n° **7** montrent que l'ensemble des quatre plans d'un groupe

de Rosenhain passe par tous les points singuliers; ce qui se vérifie d'ailleurs directement à l'aide de l'algorithme.

Trois coniques dont les plans appartiennent à un même groupe de Rosenhain ont un point singulier commun, d'après la définition même des groupes de Rosenhain; réciproquement, si trois coniques ont un point singulier commun, leurs plans appartiennent à un de ces groupes : on le voit immédiatement à l'aide du symbole graphique. En effet, les plans des six coniques qui passent par un même point singulier ont pour symbole $\wedge\vee$, trois de ces plans seront représentés par un des symboles $\wedge$, $\vee$, $\wedge|$, $|\vee$, qui font respectivement partie des symboles $\wedge\wedge$, $\vee\vee$, $\wedge\wedge$, $\vee\vee$, correspondant à des groupes de Rosenhain.

22. *Remarque.* — Soient des fonctions ϑ en nombre pair, $\alpha\alpha'$, $\alpha\beta'$, ..., $\gamma\delta'$; écrivons, comme tout à l'heure,

$$\alpha\alpha'.\alpha\beta'\ldots\gamma\delta' = \alpha^h\beta^k\gamma^l\delta^m.\alpha'^{h'}\beta'^{k'}\gamma'^{l'}\delta'^{m'}.$$

Pour que le produit des ϑ considérés ait sa caractéristique nulle, il faut et il suffit que h, k, l, m soient de même parité, ainsi que h', k', l', m'; pour que ce produit soit pair, il faut que les symboles 1 et 1' figurent au total un nombre pair de fois dans $\alpha\alpha'.\alpha\beta'\ldots\gamma\delta'$, c'est-à-dire que h, k, l, m soient de même parité que h', k', l', m', quels que soient ceux des caractères α, β, ..., δ' qui correspondent aux caractères 1 et 1'.

En d'autres termes, si nous nous reportons au théorème fondamental du n° **16**, nous voyons que $2p$ coniques de la surface de Kummer, $\alpha\alpha'$, $\alpha\beta'$, ..., $\gamma\delta'$, seront sur une surface algébrique d'ordre p, si, étant posé

$$\alpha\alpha'.\alpha\beta'\ldots\gamma\delta' = \alpha^h\beta^k\gamma^l\delta^m.\alpha'^{h'}\beta'^{k'}\gamma'^{l'}\delta'^{m'},$$

les exposants h, k, l, ..., l', m' sont tous de même parité.

Cette condition est nécessaire et suffisante; nous en ferons plus loin des applications.

23. II. *Groupes de Göpel.* — Ce sont des groupes de quatre plans formant un tétraèdre qui n'a aucun point singulier pour sommet.

On trouve aisément, à l'aide de l'algorithme, que les symboles des quatre plans d'un groupe sont de deux types.

1° $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$; ce type donne 24 groupes.

2° $\alpha\alpha'$, $\alpha\beta'$, $\beta\alpha'$, $\beta\beta'$; ce type donne 36 groupes.

Il y a donc 60 groupes de Göpel.

Les mêmes symboles, avec parenthèses, désignent 60 groupes de quatre points singuliers, sommets d'un tétraèdre qui n'a pour face aucun plan singulier; nous appellerons ces groupes : *groupes de points de Göpel*, les précédents étant les *groupes de plans, ou tétraèdres de Göpel*.

Les symboles graphiques des groupes de points ou plans de Göpel sont

$$\text{IIII} \quad \text{et} \quad \bowtie.$$

Le produit des quatre ϑ qui correspondent aux plans d'un tétraèdre de Göpel est une fonction paire, à caractéristique nulle; car on a, par exemple,

$$\alpha\alpha'.\beta\beta'.\gamma\gamma'.\delta\delta' = \alpha\beta\gamma\delta.\alpha'\beta'\gamma'\delta'$$

et tous les exposants au second membre sont de même parité; de même,

$$\alpha\alpha'.\alpha\beta'.\beta\alpha'.\beta\beta' = \alpha^2\beta^2\alpha'^2\beta'^2.$$

Donc (nos **16** et **22**) :

Les faces d'un tétraèdre de Göpel touchent la surface de Kummer suivant quatre coniques, qui sont situées sur une même surface du second ordre.

24. III. *Octaèdres de Göpel.* — Nous donnerons le nom d'*octaèdres de Göpel* à des groupes remarquables de huit plans singuliers, en relation intime avec les tétraèdres de Göpel, et qu'on définit comme il suit.

Deux plans singuliers quelconques appartiennent à trois tétraèdres de Göpel : on le voit aisément à l'aide de l'algorithme ou du symbole

graphique; ainsi les plans || font partie des tétraèdres [⋈], ||||, ||X; nous dirons que les deux plans donnés et les trois couples de plans qui, associés à ceux-ci respectivement, forment trois tétraèdres de Göpel, constituent un octaèdre de Göpel.

Un octaèdre de Göpel est donc défini ainsi par quatre couples de plans singuliers; il résulte de ce qui a été dit au numéro précédent que les produits des ϑ qui correspondent aux quatre plans de deux quelconques de ces couples sont, pour un même octaèdre, des fonctions paires et de caractéristique nulle.

Cherchons les symboles des octaèdres, et considérons, à cet effet, deux plans singuliers : si leurs symboles n'ont aucun caractère commun, on pourra les représenter par $\alpha\alpha'$ et $\beta\beta'$; les trois couples de plans qui, avec le couple précédent, forment des tétraèdres de Göpel sont, d'après les notations données au n° **25**,

$$\alpha\beta' \text{ et } \beta\alpha', \quad \gamma\gamma' \text{ et } \delta\delta', \quad \gamma\delta' \text{ et } \delta\gamma'.$$

Si les deux plans singuliers primitifs ont un caractère commun, α, on les représentera par $\alpha\alpha'$ et $\alpha\beta'$; les trois couples formant avec ce couple un octaèdre de Göpel sont

$$\beta\alpha' \text{ et } \beta\beta', \quad \gamma\alpha' \text{ et } \gamma\beta', \quad \delta\alpha' \text{ et } \delta\beta'.$$

Si enfin les deux plans primitifs ont, dans leurs symboles, un même caractère, α', on les représentera par $\alpha\alpha'$ et $\beta\alpha'$, et l'on aura pour symboles des trois autres couples

$$\alpha\beta' \text{ et } \beta\beta', \quad \alpha\gamma' \text{ et } \beta\gamma', \quad \alpha\delta' \text{ et } \beta\delta'.$$

On trouve donc, pour représenter les quatre couples de plans d'un octaèdre de Göpel, trois types de notations,

1° $\alpha\alpha'$ et $\beta\beta'$, $\alpha\beta'$ et $\beta\alpha'$, $\gamma\gamma'$ et $\delta\delta'$, $\gamma\delta'$ et $\delta\gamma'$;

2° $\alpha\alpha'$ et $\alpha\beta'$, $\beta\alpha'$ et $\beta\beta'$, $\gamma\alpha'$ et $\gamma\beta'$, $\delta\alpha'$ et $\delta\beta'$;

3° $\alpha\alpha'$ et $\beta\alpha'$, $\alpha\beta'$ et $\beta\beta'$, $\alpha\gamma'$ et $\beta\gamma'$, $\alpha\delta'$ et $\beta\delta'$.

Le premier type donne par permutation de $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha', \beta', \gamma', \delta'$,

dix-huit octaèdres, le deuxième et le troisième en donnent six chacun : il y a donc en tout *trente octaèdres* de Göpel.

On vérifie maintenant sans difficulté, à l'aide de l'algorithme, que les quatre couples de plans d'un même octaèdre passent par huit mêmes points singuliers, qui sont respectivement, pour les types 1°, 2° et 3° :

$$(\alpha\gamma'),\ (\alpha\delta'),\ (\beta\gamma'),\ (\beta\delta'),\ (\gamma\alpha'),\ (\gamma\beta'),\ (\delta\alpha'),\ (\delta\beta');$$
$$(\alpha\alpha'),\ (\alpha\beta'),\ (\beta\alpha'),\ (\beta\beta'),\ (\gamma\alpha'),\ (\gamma\beta'),\ (\delta\alpha'),\ (\delta\beta');$$
$$(\alpha\alpha'),\ (\beta\alpha'),\ (\alpha\beta'),\ (\beta\beta'),\ (\alpha\gamma'),\ (\beta\gamma'),\ (\alpha\delta'),\ (\beta\delta').$$

Nous obtenons ainsi *trente* groupes remarquables de huit points singuliers, par chacun desquels passent quatre couples de plans singuliers; on trouve l'un quelconque de ces groupes en prenant les huit points situés dans deux plans singuliers, en dehors de leur droite d'intersection.

Observons enfin que les huit plans singuliers qui n'appartiennent pas à un octaèdre forment eux-mêmes un octaèdre; les huit points singuliers communs aux quatre couples de plans du premier octaèdre sont différents des huit points communs aux couples de plans du second : les trente groupes de huit plans et les trente groupes de huit points trouvés tout à l'heure sont donc associés deux à deux, deux groupes associés n'ayant aucun plan ou aucun point commun.

25. Avant d'abandonner la théorie des plans singuliers, nous appliquerons notre algorithme à la recherche de nouveaux groupes intéressants formés par les coniques de la surface.

Groupe de quatre coniques situées sur une même quadrique. — Pour que quatre coniques soient sur une même quadrique, il faut et il suffit (n° **22**) que le produit de leurs symboles puisse se mettre sous la forme

$$\alpha^h\beta^k\gamma^l\delta^m\alpha'^{h'}\beta'^{k'}\gamma'^{l'}\delta'^{m'},$$

$h, k, \ldots, m'$ étant des nombres entiers de même parité. D'ailleurs, puisqu'il entre quatre coniques dans le groupe considéré, on a

$$h + k + l + m = h' + k' + l' + m' = 4.$$

On est conduit ainsi à deux types d'expressions.

1° Exposants impairs :

$$h = k = \ldots = l' = m' = 1.$$

Type $\alpha\beta\gamma\delta . \alpha'\beta'\gamma'\delta'.$

Ce type donne les 24 groupes : $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\delta\delta'$ (||||).

2° Exposants pairs :

$$h = k = h' = k' = 2, \qquad l = m = l' = m' = 0.$$

Type $\alpha^2\beta^2 . \alpha'^2\beta'^2$ ou $\alpha\alpha\beta\beta . \alpha'\alpha'\beta'\beta'.$

Ce type donne les 36 groupes : $\alpha\alpha'$, $\alpha\beta'$, $\beta\alpha'$, $\beta\beta'$ ($\rhd\lhd$), en excluant les groupes tels que $\alpha\alpha' . \alpha\alpha' . \beta\beta' . \beta\beta'$, qui contiennent deux fois une même conique.

Les $24 + 36 = 60$ groupes ainsi obtenus coïncident avec les 60 tétraèdres de Göpel, qu'on devait (n° **23**) trouver comme solutions; on voit que ces tétraèdres donnent d'ailleurs toutes les solutions.

26. *Groupes de six coniques situées sur une même surface cubique.* — On devra, pour trouver ces groupes, partir d'expressions du sixième ordre en α, β, γ, δ et du même ordre en α', β', γ', δ', les exposants étant de même parité.

1° Exposants impairs.

Type unique $\alpha\alpha\alpha\beta\gamma\delta . \alpha'\alpha'\alpha'\beta'\gamma'\delta'.$

Ce type donne (¹)

16 groupes : $\alpha\beta'$, $\alpha\gamma'$, $\alpha\delta'$, $\beta\alpha'$, $\gamma\alpha'$, $\delta\alpha'$ ($\vee\wedge$),

144 groupes : $\alpha\alpha'$, $\alpha\beta'$, $\alpha\gamma'$, $\beta\alpha'$, $\gamma\alpha'$, $\delta\delta'$ ($|\vee\wedge$).

Les seize premiers groupes sont formés par les six coniques qui passent par un même point singulier.

(¹) Nous supposons ici, comme dans tout ce qui suit, qu'on exclut les groupes dans lesquels une même conique figure deux ou plusieurs fois.

2° Exposants pairs.

Type $\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma . \alpha'\alpha'\beta'\beta'\gamma'\gamma'$.

Ce type donne 96 groupes :

$$\alpha\alpha', \quad \alpha\beta', \quad \beta\alpha', \quad \beta\gamma', \quad \gamma\beta', \quad \gamma\gamma' \quad (\bowtie).$$

Types
$$\alpha\alpha\alpha\alpha\beta\beta, \quad \alpha'\alpha'\beta'\beta'\gamma'\gamma',$$
$$\alpha\alpha\alpha\alpha\beta\beta, \quad \alpha'\alpha'\alpha'\alpha'\beta'\beta',$$
$$\alpha\alpha\beta\beta\gamma\gamma, \quad \alpha'\alpha'\alpha'\alpha'\beta'\beta'.$$

Ces types doivent être exclus, comme donnant nécessairement deux fois au moins la même conique.

On a donc en tout deux cent cinquante-six groupes de six coniques différentes situées sur une même surface cubique.

Les symboles de ces groupes montrent immédiatement qu'on obtient chacun d'eux en prenant les plans singuliers non communs à deux groupes de Rosenhain, qui ont un et un seul plan singulier commun.

CHAPITRE II.

Classification des courbes algébriques tracées sur la surface de Kummer.

27. La première question que nous traiterons dans l'étude générale des courbes algébriques de la surface de Kummer est celle de la détermination et de la classification des courbes d'un degré donné.

On connaît peu de surfaces pour lesquelles ce problème soit résolu; ces surfaces (surface de Steiner, surface du troisième ordre, quadriques, etc.) sont représentables point par point sur le plan, et la question se ramène dès lors à une question de Géométrie plane.

Pour les quadriques, un élégant théorème d'Halphen donne implicitement la solution géométrique du problème : Halphen a montré, en effet, que la surface du moindre degré qu'on peut mener par une

courbe tracée sur une surface du second ordre ne coupe, en outre, cette dernière que suivant des génératrices d'un même système [1].

Sur la surface de Kummer, le résultat est plus simple encore : nous allons voir que, par une courbe algébrique quelconque tracée sur cette surface, on peut mener une seconde surface qui ne coupe, en outre, la première que suivant h coniques, h pouvant prendre les valeurs 0, 1, 2, 3, 4; et nous obtiendrons en même temps la classification des courbes d'un degré donné.

Nous savons (n° **14**) que l'équation d'une courbe algébrique, sur la surface de Kummer, est de la forme $\Theta(u, v) = 0$, Θ désignant une fonction thêta normale, d'ordre et de caractéristique quelconques, paire ou impaire; soit μ son ordre, la courbe correspondante est d'ordre 2μ.

Deux cas sont à distinguer, selon que μ est pair ou impair.

28. I. Soit d'abord μ pair, $\mu = 2m$; les courbes correspondantes sont d'ordre $4m$.

Les fonctions Θ normales, d'ordre $2m$, paires ou impaires, se répartissent en seize systèmes selon les valeurs de la caractéristique.

1° Si la *caractéristique* est *nulle* (n° **4**), les fonctions normales *paires*, d'ordre $2m$, s'expriment linéairement en fonction de $2m^2 + 2$ d'entre elles; les courbes correspondantes sont, d'après le théorème fondamental du n° **16**, les intersections complètes de la surface de Kummer et de surfaces algébriques d'ordre m.

2° Les fonctions normales, à *caractéristique nulle*, d'ordre $2m$ et *impaires* sont au nombre de $2m^2 - 2$ linéairement distinctes; les courbes correspondantes, de degré $4m$, passent par les seize points singuliers de la surface de Kummer, puisque les fonctions thêta normales, à caractéristique nulle et impaires, s'annulent pour les seize demi-périodes (n° **7**). Si l'on multiplie une fonction impaire, d'ordre $2m$, à caractéristique nulle, par le produit des quatre fonctions ζ du premier ordre correspondant aux plans singuliers d'un groupe de Rosenhain, on obtient (n° **21**) une fonction *paire*, d'ordre $2m + 4$, à caractéristique nulle; il résulte de là (n° **16**) que chacune des courbes

---

[1] *Bulletin de la Soc. Math. de France*, t. I, p. 19.

précédentes est l'intersection de la surface de Kummer avec une surface d'ordre $m+2$, passant par les quatre coniques d'un groupe de Rosenhain, quelconque d'ailleurs.

On obtient donc toutes les courbes de la famille considérée en prenant l'intersection de la surface de Kummer avec des surfaces d'ordre $m+2$, menées par quatre coniques d'un même groupe Rosenhain, et réciproquement.

Si m est égal à 1, $2m^2-2$ est nul; il n'y a pas de fonction impaire normale, d'ordre 2, à caractéristique nulle et la famille précédente n'existe pas.

3° Considérons maintenant les fonctions Θ normales, d'ordre $2m$, à *caractéristique non nulle;* elles forment quinze systèmes, selon les valeurs de la caractéristique, et, dans chaque système, il y a $2m^2$ fonctions paires et $2m^2$ fonctions impaires, linéairement distinctes (n° 5); d'où trente familles de courbes d'ordre $4m$.

On peut toujours trouver deux fonctions ϑ, du premier ordre, telles que leur produit soit une fonction paire ou impaire, à volonté, ayant une caractéristique non nulle donnée à l'avance. Soient, en effet, ω, ω', θ, θ' les éléments de la caractéristique donnée; ω_1, ω'_1, θ_1, θ'_1 et ω_2, ω'_2, θ_2, θ'_2 ceux des caractéristiques respectives des deux ϑ cherchés. On aura

$$(9)\quad \omega_1+\omega_2\equiv\omega,\quad \omega'_1+\omega'_2\equiv\omega',\quad \theta_1+\theta_2\equiv\theta,\quad \theta'_1+\theta'_2\equiv\theta' \pmod 2;$$

de plus la quantité

$$\omega_1\theta_1+\omega'_1\theta'_1+\omega_2\theta_2+\omega'_2\theta'_2$$

aura une parité donnée (n° **6**).

Si l'on tire ω_2, ω'_2, θ_2, θ'_2 des quatre premières relations pour les introduire dans la dernière condition, on trouve la congruence

$$\omega_1\theta+\theta_1\omega+\omega'_1\theta'+\theta'_1\omega'\equiv\omega\theta+\omega'\theta'+\varepsilon \pmod 2,$$

ε étant une quantité connue, égale à 0 ou à 1.

Cette congruence a toujours des solutions en ω_1, θ_1, ω'_1, θ'_1, puisque

$\omega, \theta, \omega', \theta'$ ne sont pas nuls à la fois, la caractéristique donnée n'étant pas nulle. Chaque système de valeurs de $\omega_1, \theta_1, \omega'_1, \theta'_1$ donne, en vertu de (9), un système de valeurs de $\omega_2, \theta_2, \omega'_2, \theta'_2$, et ces deux systèmes sont différents, puisque $\omega, \theta, \omega', \theta'$ ne sont pas tous nuls.

D'après cela, on peut multiplier une fonction Θ, paire ou impaire, normale, d'ordre $2m$, à caractéristique non nulle, par deux fonctions $\mathfrak{F}$ convenablement choisies, de telle sorte que le produit soit une fonction *paire*, d'ordre $2m+2$, à *caractéristique nulle :* géométriquement, d'après le théorème du n° **16**, cela revient à dire que la courbe d'ordre $4m$ qui correspond, sur la surface de Kummer, à la fonction Θ considérée, est l'intersection de cette surface avec une surface d'ordre $m+1$, passant par deux coniques singulières.

On peut associer deux à deux les seize coniques de la surface de Kummer de $\frac{16.15}{2} = 120$ manières; il semble donc qu'on doive obtenir géométriquement 120 familles de courbes d'ordre $4m$, tandis que l'Analyse nous a appris qu'on doit en trouver seulement 30. Mais nous savons que, étant donné un couple de fonctions $\mathfrak{F}$ du premier ordre, il existe trois autres couples tels que le produit des $\mathfrak{F}$ de deux quelconques des quatre couples soit une fonction Θ paire et de caractéristique nulle (n° **24**); les quatre couples de plans singuliers correspondants de la surface de Kummer forment un octaèdre de Göpel. Donc quatre couples de coniques dont les plans forment un octaèdre de Göpel ne donnent naissance, par l'application du procédé géométrique indiqué plus haut, qu'à une seule et même famille de courbes de degré $4m$, et, par suite, le nombre de ces familles de courbes est $\frac{120}{4} = 30$, résultat qui concorde avec celui de l'Analyse.

La courbe d'ordre $4m$, intersection de la surface de Kummer et d'une surface d'ordre $m+1$ menée par deux coniques singulières, passe évidemment par les huit points singuliers situés dans les plans de ces deux coniques, en dehors de leur droite d'intersection; ces huit points sont communs (n° **24**) aux quatre couples de plans d'un même octaèdre de Göpel.

Si l'on considère deux octaèdres de Göpel *associés* (n° **24**), les deux familles de courbes d'ordre $4m$ qui correspondent respectivement à

chacun d'eux seront dites *associées;* les courbes de l'une des familles passent par huit points singuliers et les courbes de l'autre famille passent par les huit autres points singuliers. Ces résultats concordent avec ceux du n° **7**.

Nous avons ainsi obtenu la définition géométrique de toutes les courbes de degré $4m$ sur la surface de Kummer; elles correspondent à des Θ d'ordre $2m$. Il nous reste à examiner les courbes qui correspondent à des Θ d'ordre μ, impair.

29. II. Soit maintenant $\mu = 2m + 1$; les courbes correspondantes sont d'ordre $4m + 2$.

Les fonctions Θ normales, d'ordre $2m + 1$, paires ou impaires, se répartissent toujours en seize systèmes, selon les valeurs de la caractéristique; et pour une caractéristique $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}$, il y a (n^{os} **4** et **5**)

$$2m^2 + 2m + 1 \quad \text{fonctions} \begin{cases} \text{paires} \\ \text{impaires} \end{cases}$$

et

$$2m^2 + 2m \quad \text{fonctions} \begin{cases} \text{impaires} \\ \text{paires} \end{cases},$$

selon que la quantité

$$\omega\theta + \omega'\theta' \quad \text{est} \begin{cases} \text{paire} \\ \text{impaire} \end{cases}.$$

1° Supposons d'abord que $\omega\theta + \omega'\theta'$ soit pair; la fonction $\mathfrak{T}_0$, du premier ordre, de caractéristique $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}$ est paire (n° **6**), et le produit de cette fonction par une fonction Θ, *paire,* d'ordre $2m + 1$ et de même caractéristique, est une fonction normale, paire, d'ordre $2m + 2$ et de caractéristique nulle. En d'autres termes, d'après le théorème du n° **16**, la courbe d'ordre $4m + 2$, qui correspond à la fonction Θ d'ordre $2m + 1$ considérée, est l'intersection de la surface de Kummer avec une surface d'ordre $m + 1$ menée par une conique singulière.

Si, $\omega\theta + \omega'\theta'$ étant toujours supposé pair, on considère une fonction Θ *impaire,* d'ordre $2m + 1$, et de caractéristique $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ \theta & \theta' \end{vmatrix}$, le raisonnement précédent ne peut s'appliquer. En ce cas, soient $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3$

trois fonctions $\mathfrak{S}$ d'ordre un, formant un groupe de Rosenhain avec la fonction $\mathfrak{S}_0$ d'ordre un et de caractéristique $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ 0 & 0' \end{vmatrix}$: nous savons (n° **21**) que le produit $\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_3\mathfrak{S}_0$ est impair et de caractéristique nulle. Il en résulte, puisque $\mathfrak{S}_0$ est pair, que le produit $\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_3$ est impair, et a même caractéristique que $\mathfrak{S}_0$. Si donc on multiplie la fonction Θ impaire considérée par $\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2\mathfrak{S}_3$, on obtient une fonction normale paire d'ordre $2m+4$ et de caractéristique nulle. En d'autres termes, d'après le théorème du n° **16**, la courbe d'ordre $4m+2$ qui correspond à notre fonction Θ impaire est l'intersection de la surface de Kummer avec une surface d'ordre $m+2$, menée par trois coniques singulières qui font partie d'un même groupe de Rosenhain [1].

Nous savons (n° **7**), ce qui se déduirait d'ailleurs aisément des résultats géométriques précédents, que, dans le cas où $\omega\theta+\omega'\theta'$ est pair, les courbes qui correspondent aux Θ pairs, d'ordre $2m+1$ et de caractéristique $\begin{vmatrix} \omega & \omega' \\ 0 & 0' \end{vmatrix}$, passent par six points singuliers situés dans un même plan singulier, et que celles qui correspondent aux Θ impairs de même ordre et de même caractéristique passent par les dix autres points singuliers.

2° Le cas où $\omega\theta+\omega'\theta'$ est impair donne lieu à des raisonnements identiques; il suffit d'échanger partout les mots *pair* et *impair*.

30. Nous pouvons maintenant énoncer les propositions suivantes, qui donnent la détermination géométrique et la classification des courbes d'un degré fixé à l'avance, sur la surface de Kummer.

Les courbes algébriques tracées sur la surface de Kummer sont de degré pair.

Les courbes d'ordre $4m$ tracées sur la surface *se répartissent en* 32 *familles :*

1° *Une famille de courbes dont chacune est l'intersection complète et indécomposable de la surface de Kummer avec une surface*

---

[1] D'après le n° 21, ces trois coniques sont trois coniques quelconques, passant par un même point singulier.

d'ordre m générale. L'équation des courbes de cette famille dépend linéairement de $2m^2 + 1$ *paramètres;*

2° *Une famille, que nous appellerons* singulière, *de courbes passant par les seize points singuliers, dont chacune est l'intersection de la surface de Kummer avec une surface générale d'ordre* $m + 2$, *menée par quatre coniques singulières appartenant à un même groupe de Rosenhain, d'ailleurs arbitraire. L'équation des courbes de la famille singulière dépend linéairement de* $2m^2 - 3$ *paramètres* (¹);

3° *Trente familles, deux à deux associées, de courbes dont chacune passe par huit points singuliers et constitue l'intersection de la surface de Kummer avec une surface générale d'ordre* $m + 1$, *menée par deux coniques singulières. L'équation des courbes de chaque famille dépend linéairement de* $2m^2 - 1$ *paramètres.*

Les courbes d'une de ces familles passant par huit points singuliers, les courbes de la famille associée passent par les huit autres. Chaque famille est liée à un octaèdre de Göpel.

Les courbes d'ordre $4m + 2$ tracées sur la surface *se répartissent en* 32 *familles.*

1° *Seize familles de courbes passant par six points singuliers et dont chacune est l'intersection de la surface de Kummer avec une surface générale d'ordre* $m + 1$ *menée par une conique singulière. L'équation des courbes de chaque famille dépend de* $2m^2 + 2m$ *paramètres;*

2° *Seize familles de courbes passant par dix points singuliers et dont chacune est l'intersection de la surface de Kummer avec une surface générale d'ordre* $m + 2$, *menée par trois coniques singulières qui ont en commun un point singulier. L'équation générale des courbes de chaque famille dépend linéairement de* $2m^2 + 2m - 1$ *paramètres.*

Chacune des seize familles de la première espèce est associée à une famille de la seconde espèce d'après la loi suivante : les courbes

---

(¹) Pour $m = 1$, c'est-à-dire pour les courbes d'ordre quatre, la famille singulière n'existe pas (n° 28).

de la première famille passent par six points singuliers situés sur une même conique, les courbes de la famille associée passent par les dix autres points singuliers.

Dans ces énoncés, quand nous disons que l'équation d'une famille de courbes dépend linéairement de k paramètres, nous entendons que cette équation peut se mettre sous la forme

$$\lambda_1 \Theta_1(u, v) + \lambda_2 \Theta_2(u, v) + \ldots + \lambda_{k+1} \Theta_{k+1}(u, v) = 0,$$

les λ étant des constantes arbitraires, et les Θ des fonctions normales de même ordre et de même caractéristique, simultanément paires ou impaires.

51. *Remarque.* — Les courbes d'ordre $4m$ ou $4m+2$ dont on vient de donner la détermination sur la surface de Kummer sont les plus générales de leur degré et n'ont pas de points multiples, si l'on ne particularise pas les fonctions thêta correspondantes.

Il est intéressant d'étudier la nature des points multiples qu'elles peuvent présenter en un des points singuliers de la surface; nous choisirons le point $u = 0$, $v = 0$, mais nos raisonnements s'étendraient sans difficulté à tous les autres.

Considérons les fonctions $\Theta_m(u, v)$, d'ordre m, normales, de caractéristique donnée, paires ou impaires.

Si elles ne s'annulent pas toutes pour $u = 0$, $v = 0$, elles sont paires et, par suite, celles d'entre elles qui deviennent nulles au point $(0, 0)$ ont aussi leurs dérivées premières, par rapport à u et à v, nulles au même point. On voit ainsi que les courbes de la famille correspondante ne passent pas toutes par le point $(0, 0)$, mais que celles qui y passent y ont un point double, et plus généralement un point multiple d'ordre pair.

Si les fonctions $\Theta_m(u, v)$ s'annulent toutes pour $u = 0$, $v = 0$, elles sont impaires, et les courbes correspondantes, qui passent toutes par le point $(0, 0)$, ne peuvent avoir en ce point qu'un point multiple d'ordre impair.

Ainsi :

Les courbes d'un même ordre et d'une même famille, qui passent

par un point singulier de la surface de Kummer, ont en ce point un point multiple d'ordre impair ou d'ordre pair, selon que toutes les courbes de la famille passent ou ne passent pas par ce point.

Dans cet énoncé, le point multiple d'ordre impair peut être un point simple.

Ce résultat permet de déterminer la famille à laquelle appartient une courbe de la surface de Kummer lorsqu'on connaît l'ordre de multiplicité des seize points singuliers sur cette courbe.

Ainsi, une courbe d'ordre $4m$ ayant un point double en chacun des seize points singuliers est l'intersection de la surface de Kummer avec une surface d'ordre m passant par ces points, etc.

32. Étant données deux courbes d'un même ordre et d'une même famille, il est clair que le produit des fonctions Θ correspondantes est toujours une fonction Θ normale paire, d'ordre pair, à caractéristique nulle : donc (n° **16**) ces deux courbes constituent l'intersection complète de la surface de Kummer et d'une surface algébrique. Ainsi :

Par deux courbes tracées sur la surface de Kummer, de même degré, $2p$, et appartenant à la même famille, on peut toujours faire passer une surface d'ordre p, ne coupant plus la surface de Kummer en dehors de ces courbes.

Soient

$$\lambda_1\Theta_1 + \lambda_2\Theta_2 + \ldots + \lambda_{k+1}\Theta_{k+1} = 0,$$
$$\mu_1\Theta_1 + \ldots \quad + \ldots + \mu_{k+1}\Theta_{k+1} = 0$$

les équations des deux courbes considérées.

Les produits Θ_i et Θ_j étant (n° **16**) des fonctions entières, d'ordre p, des coordonnées $x_1, x_2, x_3\ x_4$, d'un point de la surface de Kummer, l'équation de la surface d'ordre p qui passe par les deux courbes s'obtiendra en remplaçant dans l'équation développée :

$$(\lambda_1\Theta_1 + \lambda_2\Theta_2 + \ldots + \lambda_{k+1}\Theta_{k+1})(\mu_1\Theta_1 + \ldots + \mu_{k+1}\Theta_{k+1}) = 0,$$

les produits Θ_i^2 et $\Theta_i\Theta_j$ par leurs valeurs en fonction entière des coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4.

Dans le cas où les deux courbes coïncident, on obtiendra par ce procédé l'équation d'une surface d'ordre p inscrite à la surface de Kummer le long de la courbe unique considérée (n° **17**).

Il va sans dire que si p est égal ou supérieur à 4, on pourra ajouter aux premiers membres des équations des surfaces ainsi obtenues une expression de la forme $K\varphi_{p-4}$, K étant le premier membre de l'équation de la surface de Kummer, et φ_{p-4} un polynôme homogène quelconque d'ordre $p-4$ en x_1, x_2, x_3, x_4.

Surfaces inscrites à la surface de Kummer.

55. Soit l'équation d'une courbe d'ordre $2p$

$$\lambda_1\Theta_1(u, v) + \ldots + \lambda_{k+1}\Theta_{k+1}(u, v) = 0,$$

celle de la surface inscrite d'ordre p correspondante sera, comme on vient de le dire, de la forme

$$(10) \qquad \lambda_1^2 A_{11} + 2\lambda_1\lambda_2 A_{12} + \lambda_2^2 A_{22} + \ldots + \lambda_{k+1}^2 A_{k+1,k+1} = 0,$$

les A étant des polynômes d'ordre p en x_1, x_2, x_3, x_4. Cette équation, si l'on y fait varier les paramètres λ, représente une famille de surfaces d'ordre p, qui sont toutes inscrites à la surface de Kummer le long des courbes d'ordre $2p$ appartenant à la même famille.

D'après cela, en appelant *surface inscrite* à la surface de Kummer une surface qui touche celle-ci en tous ses points de rencontre avec elle, on voit que la théorie des familles de surfaces inscrites est la même que celle des courbes algébriques de la surface, et qu'on peut énoncer les propositions suivantes :

Il existe trente-deux familles de surfaces d'ordre $2m$ inscrites à la surface de Kummer.

Les surfaces de la première famille sont inscrites suivant les courbes d'ordre $4m$ de la première famille; leur équation générale est de la forme

$$(11) \qquad A_m^2 + K\varphi_{2m-4} = 0,$$

où A_m et φ_{2m-4} sont des polynômes arbitraires en x_1, x_2, x_3, x_4, d'ordre marqué par l'indice; K est toujours le premier membre de l'équation de la surface de Kummer.

Les surfaces de la deuxième famille sont inscrites le long des courbes d'ordre $4m$ de la famille singulière; leur équation générale est de la forme (10), *où* $k = 2m^2 - 3$ [1].

Les surfaces des trente dernières familles sont inscrites le long des courbes d'ordre $4m$ des trente dernières familles; leur équation générale est, pour les surfaces inscrites d'une même famille, de la forme (10) *où k a la valeur* $2m^2 - 1$.

De même :

Il existe trente-deux familles de surfaces d'ordre $2m+1$ inscrites à la surface de Kummer, le long des trente-deux familles de courbes d'ordre $4m+2$ de cette surface.

L'équation générale des surfaces inscrites de l'une des seize premières familles est de la forme (10), *où k a la valeur* $2m^2 + 2m$; *celle des surfaces inscrites de l'une des seize dernières familles est de la même forme, k ayant la valeur* $2m^2 + 2m - 1$.

34. Soient $A = 0$ et $C = 0$ deux surfaces inscrites du même ordre et d'une même famille; leurs deux courbes de contact sont (n° **32**) sur une surface $B = 0$, de même ordre, h, que les premières.

Si dans A on remplace x_1, x_2, x_3, x_4 par les coordonnées d'un point de la surface de Kummer, exprimées en fonction hyperelliptique de u et v, et si l'on fait la même substitution dans B et dans C, on trouve, d'après le n° **32**,

$$A = \Theta_1^2(u, v), \qquad C = \Theta_2^2(u, v), \qquad B = \Theta_1\Theta_2,$$

Θ_1 et Θ_2 étant des fonctions thêta; on a donc identiquement, en tout point de la surface de Kummer,

$$AC - B^2 = 0,$$

---

[1] Pour $m = 1$, cette famille de surfaces inscrites n'existe pas.

et, par suite, en réintroduisant dans A, B, C les coordonnées courantes, on obtient l'*identité*

$$AC - B^2 = KD,$$

où D est un polynôme entier d'ordre $2h - 4$ en x_1, x_2, x_3, x_4. Cette identité a lieu *pour tous les points de l'espace;* elle nous sera très utile dans la suite.

55. Il est intéressant de remarquer que le nombre des familles de surfaces d'ordre p inscrites à la surface de Kummer est précisément égal à celui des familles de courbes d'ordre p inscrites à une courbe du quatrième degré, à un point double : par conséquent, si l'on considère la section de la surface de Kummer par un de ses plans tangents, on obtiendra *toutes* les courbes inscrites à cette section en coupant, par le même plan, toutes les surfaces inscrites à la surface de Kummer [1].

La proposition ne serait plus vraie si, au lieu de la section par un plan tangent, on considérait une section plane quelconque.

CHAPITRE III.

Biquadratiques situées sur la surface de Kummer et quadriques inscrites à cette surface.

56. Après les coniques, les courbes de plus petit degré que l'on rencontre sur la surface de Kummer sont du quatrième ordre : il n'y

---

[1] Nous renverrons, pour le nombre des familles de courbes d'ordre p inscrites à une quartique plane, possédant un point double, à notre Mémoire sur l'*Application de la théorie des fonctions fuchsiennes à la Géométrie* (4e série de ce Journal, t. II). Il résulte des formules données aux nos 39 et 43 de ce Mémoire qu'il existe seize systèmes de courbes d'ordre p inscrites à la quartique, chaque système se décomposant en deux familles, soit en tout trente-deux familles. Si p est pair, $p = 2m$, un des seize systèmes, est particulièrement remarquable : la première des deux familles de ce système comprend les courbes d'ordre m du plan comptées deux fois, et correspond à la première famille (11) de surfaces d'ordre $2m$ inscrites à la surface de Kummer; la seconde famille du système correspond à notre seconde famille (ou singulière) de surfaces inscrites.

a (n° **30**) que trente et une familles de courbes de cet ordre; la première se compose de l'ensemble des sections planes; les trente autres, dont nous allons maintenant aborder l'étude, sont composées de *biquadratiques*, car deux courbes *quelconques* d'une même famille étant (n° **32**) sur une quadrique, chacune de ces courbes est la base d'un faisceau ponctuel de surfaces du second ordre.

Les biquadratiques d'une même famille sont (n° **30**) les intersections de la surface de Kummer avec les quadriques passant par deux coniques singulières : en particulier, ces deux coniques constituent une biquadratique de la famille. Nous savons (n° **28**) que, pour la définition géométrique d'une famille de courbes d'ordre $4m$, on peut remplacer les deux coniques primitives par trois autres couples de coniques, les plans de quatre couples formant un octaèdre de Göpel; il en résulte que, dans une même famille de biquadratiques, figurent quatre couples de coniques.

Le long de toute biquadratique on peut (n° **17**) *inscrire à la surface de Kummer une surface du second ordre;* nous trouvons ainsi trente familles de quadriques inscrites, dont chacune comprend quatre couples de plans singuliers, formant un octaèdre de Göpel ([1]).

Les biquadratiques et, par suite, les quadriques inscrites d'une même famille passent par les huit points singuliers communs aux couples de plans de l'octaèdre qui correspond à la famille.

Les trente familles sont deux à deux associées (n° **30**), de telle sorte que les octaèdres correspondant à deux familles associées n'ont aucun plan singulier commun.

Pour définir une famille de quadriques inscrites, il suffit de connaître l'octaèdre de Göpel qui lui correspond; or nous avons trouvé, au n° **24**, trois types de notations pour les octaèdres.

Dans le premier type, que nous désignerons par le symbole (entre crochets) $[\alpha\beta\alpha'\beta']$, les quatre couples de plans singuliers sont

$$\alpha\alpha' \text{ et } \beta\beta', \quad \alpha\beta' \text{ et } \beta\alpha', \quad \gamma\gamma' \text{ et } \delta\delta', \quad \gamma\delta' \text{ et } \delta\gamma';$$

([1]) MM. Rohn et Darboux ont établi l'existence des trente systèmes de quadriques inscrites, dont M. Darboux a fait connaître plusieurs propriétés géométriques que nous retrouvons plus loin (*Voir* Rohn, *Math. Annalen*, t. XV, p. 351; Darboux, *Comptes rendus*, t. XCII, p. 686).

les huit points singuliers communs à ces quatre couples sont

$$(\alpha\gamma'),\quad (\alpha\delta'),\quad (\beta\gamma'),\quad (\beta\delta'),\quad (\gamma\alpha'),\quad (\gamma\beta'),\quad (\delta\alpha'),\quad (\delta\beta')\ (^1).$$

Dans le second type, que nous désignerons par le symbole $|\alpha'\beta'|$, les couples de plans sont

$$\alpha\alpha \text{ et } \alpha\beta',\quad \beta\alpha \text{ et } \beta\beta',\quad \gamma\alpha' \text{ et } \gamma\beta',\quad \delta\alpha' \text{ et } \delta\beta',$$

et les huit points ont les mêmes symboles que ces huit plans.

Enfin, dans le troisième type, auquel nous attacherons le symbole $|\alpha\beta|$, les couples de plans sont

$$\alpha\alpha \text{ et } \beta\alpha,\quad \alpha\beta' \text{ et } \beta\beta,\quad \alpha\gamma' \text{ et } \beta\gamma',\quad \alpha\delta' \text{ et } \beta\delta',$$

et les huit points ont les mêmes symboles.

Nous désignerons dans ce qui suit par *plans singuliers d'une famille* de quadriques inscrites les huit plans qui font partie de cette famille; par *points singuliers d'une famille* les huit points par lesquels passent les quadriques inscrites de la famille; nous représenterons une famille de biquadratiques ou de quadriques inscrites par le symbole de l'octaèdre correspondant, tel que $|\alpha\beta|$.

Il est clair que la famille associée de $|\alpha\beta|$ est $|\gamma\delta|$, de même que la famille associée de $|\alpha'\beta'|$ est $|\gamma'\delta'|$; enfin les familles $|\alpha\beta\alpha'\beta'|$ et $|\alpha\beta\gamma\delta'|$ sont associées.

57. Cela posé, on vérifie aisément, à l'aide des notations symboliques, les propositions suivantes :

1° *Les biquadratiques d'une même famille ont deux points singuliers communs avec tout plan singulier n'appartenant pas à la famille*, d'où il suit que ces courbes coupent le plan considéré en *deux* points mobiles.

D'ailleurs toute courbe tracée sur la surface de Kummer touche nécessairement un plan singulier en tous les points, non singuliers, où elle le rencontre, et dès lors les biquadratiques d'une famille touchent

(1) D'après cela, les symboles $[\alpha\beta\alpha'\beta']$ et $[\gamma\delta\gamma'\delta']$ désignent le même octaèdre.

en un point les huit plans singuliers qui ne font pas partie de la famille; donc :

Les quadriques inscrites d'une même famille touchent les huit plans singuliers de la famille associée.

2° *Deux familles de quadriques inscrites, non associées, ont en commun quatre plans et quatre points singuliers;* mais *deux cas* sont ici à distinguer.

Dans le *premier cas,* les quatre plans singuliers communs forment un *tétraèdre de Rosenhain,* dont les sommets sont les quatre points singuliers communs. Ainsi, les familles $[\alpha\beta]$ et $[\alpha\gamma]$ ont en commun le tétraèdre de Rosenhain : $\alpha\alpha'$, $\alpha\beta'$, $\alpha\gamma'$, $\alpha\delta'$.

Dans le *second cas,* les quatre plans singuliers communs forment un *groupe de Göpel,* et appartiennent à une troisième famille; ainsi les familles $[\alpha\beta]$ et $[\alpha'\beta']$ ont en commun les quatre plans $\alpha\alpha'$, $\alpha\beta'$, $\beta\alpha'$, $\beta\beta'$, qui appartiennent à la famille $[\alpha\beta\alpha'\beta']$. Quant aux quatre points communs aux deux premières familles, ils forment aussi un groupe de Göpel et appartiennent à la famille associée de $[\alpha\beta\alpha'\beta']$.

On trouve sans difficulté à l'aide de la notation symbolique qu'*une famille de quadriques inscrites a en commun, avec* douze *autres familles, quatre plans singuliers formant un groupe de Göpel; avec* seize *autres, quatre plans singuliers formant un groupe de Rosenhain;* la trentième famille est l'*associée* de la première.

Ainsi, les douze familles qui ont en commun avec $[\alpha\beta]$ un groupe de Göpel de plans singuliers sont :

$$[\alpha'\beta'],\quad [\gamma'\delta'],\quad [\alpha'\gamma'],\quad [\beta'\delta'],\quad [\alpha'\delta'],\quad [\beta'\gamma'],$$
$$[\alpha\beta\alpha'\beta'],\quad [\alpha\beta\gamma'\delta'],\quad [\alpha\beta\alpha'\gamma'],\quad [\alpha\beta\beta'\delta'],\quad [\alpha\beta\alpha'\delta'],\quad [\alpha\beta\beta'\gamma'].$$

Les autres familles (l'associée $[\gamma\delta]$ exceptée) ont en commun avec $[\alpha\beta]$ quatre plans formant un groupe de Rosenhain.

3° *Deux biquadratiques appartenant respectivement à deux familles associées se coupent en quatre points mobiles :* cela résulte de la formule de M. Poincaré, car, d'après cette formule, deux fonctions Θ du second ordre ont huit zéros communs; les deux Θ qui correspondent à deux biquadratiques étant des fonctions soit paires, soit

impaires, les huit zéros communs sont deux à deux égaux et de signes contraires, et ne donnent dès lors que quatre points de la surface de Kummer.

Deux biquadratiques appartenant à deux familles non associées se coupent en deux points mobiles : car, parmi les huit zéros communs aux deux fonctions Θ correspondantes, figurent *quatre* demi-périodes, donnant les *quatre* points singuliers communs aux deux courbes; les quatre autres zéros, deux à deux égaux et de signes contraires, donnent *deux* points de la surface de Kummer.

En d'autres termes :

Deux quadriques inscrites, appartenant respectivement à deux familles associées, se touchent en quatre points, et se coupent dès lors suivant quatre droites. (Darboux.)

Deux quadriques inscrites, appartenant respectivement à deux familles non associées se touchent en deux points.

Nous allons faire voir que, dans ce dernier cas, les deux quadriques se coupent suivant *deux coniques*, ou suivant *une droite et une cubique*, selon que les quatre plans singuliers qui leur sont communs forment un groupe de Göpel ou un groupe de Rosenhain.

38. Considérons d'abord *un groupe de Göpel de plans singuliers;* soient $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $t = 0$ les équations de ces quatre plans; $V = 0$ celle de la quadrique qui contient (n° **23**) leurs coniques de contact avec la surface de Kummer; l'équation de celle-ci est de la forme

$$K = V^2 - xyzt = 0. \tag{12}$$

Les quadriques représentées par l'équation

$$\lambda^2 yz + 2\lambda V + xt = 0,$$

où λ est un paramètre variable, sont inscrites à la surface de Kummer, $K = 0$, puisque leur enveloppe a pour équation $V^2 - xyzt = 0$, et cette famille de quadriques comprend évidemment les deux couples

de plans $yz = 0$ et $xt = 0$. Les équations

$$\mu^2 zx + 2\mu V + yt = 0,$$
$$\varpi^2 xy + 2\varpi V + zt = 0,$$

où μ et ϖ sont des paramètres variables, représentent aussi des quadriques inscrites à $K = 0$, et chacune de ces nouvelles familles comprend, comme la première, les quatre plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $t = 0$.

Nous avons ainsi les équations de trois familles de quadriques inscrites à la surface de Kummer, et ayant en commun un groupe de Göpel de plans singuliers; il est clair d'ailleurs, pour que $K = 0$ soit une surface de Kummer, que les coefficients de V doivent vérifier certaines conditions, mais ces conditions sont inutiles à préciser pour ce qui suit. Posons, pour abréger,

$$A = \lambda^2 yz + 2\lambda V + xt,$$
$$B = \mu^2 zx + 2\mu V + yt,$$
$$C = \varpi^2 xy + 2\varpi V + zt,$$

et

$$\varphi = \lambda yz + \mu zx + \varpi xy,$$
$$\psi = \lambda\mu z + \lambda\varpi y + \mu\varpi x,$$
$$S = V(t + \psi) + t\varphi + \lambda\mu\varpi xyz,$$
$$G = 8\lambda\mu\varpi V + 4\lambda\mu\varpi\varphi - (t - \psi)^2,$$

on a *identiquement*

$$ABC - S^2 = KG.$$

On a également les identités

$$4\mu\varpi A = G + (t - \psi + 2\mu\varpi x)^2,$$
$$4\lambda\varpi B = G + (t - \psi + 2\lambda\varpi y)^2,$$
$$4\lambda\mu C = G + (t - \psi + 2\lambda\mu z)^2.$$

Ces dernières relations montrent que les quadriques A, B, C sont circonscrites à la quadrique G, et se coupent deux à deux suivant

deux coniques; la première identité fait voir que les trois coniques de contact des quadriques A, B, C, avec la quadrique G, sont sur une surface cubique, $S = 0$, qui passe par les biquadratiques de contact des trois premières quadriques avec la surface de Kummer, $K = 0$. On peut donc énoncer les propositions suivantes :

Soient deux familles de quadriques inscrites à la surface de Kummer et ayant en commun quatre plans singuliers formant un groupe de Göpel; ces quatre plans appartiennent à une troisième famille de quadriques inscrites.

Trois quadriques inscrites quelconques, appartenant respectivement à ces trois familles, ont leurs biquadratiques de contact avec la surface de Kummer situées sur une même surface cubique, qui coupe en outre chacune d'elles suivant une conique; il existe une surface du second ordre inscrite aux trois quadriques le long des trois coniques ainsi déterminées.

Les trois quadriques se coupent deux à deux suivant deux coniques.

39. Les identités précédentes donnent encore lieu à d'autres conséquences.

Les deux quadriques A et B se touchent en deux points situés sur la droite $t - \psi + 2\mu\varpi x = 0$; $t - \psi + 2\lambda\varpi y = 0$, qui rencontre évidemment la droite $x = 0$, $y = 0$, et aussi, en vertu de l'expression de ψ, la droite $t = 0$, $z = 0$: donc les trois quadriques A, B, C se touchent deux à deux en deux points, situés d'ailleurs sur la surface de Kummer, et les trois droites qui joignent les points de contact d'un même couple s'appuient sur deux arêtes opposées du tétraèdre de référence. De plus, ces trois droites concourent au point d'intersection des trois plans

$$t - \psi + 2\mu\varpi x = 0, \qquad t - \psi + 2\lambda\varpi y = 0, \qquad t - \psi + 2\lambda\mu z = 0,$$

c'est-à-dire au point

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\mu} = \frac{z}{\varpi} = \frac{t}{\lambda\mu\varpi}.$$

Inversement, si ce point est donné arbitrairement, on déterminera les quadriques A, B, C, qui lui correspondent, par les relations

$$\frac{\lambda}{x} = \frac{\mu}{y} = \frac{\varpi}{z} = \frac{\lambda\mu\varpi}{t}$$

qui donnent, pour λ, μ, ϖ, deux systèmes de solutions (en écartant la solution $\lambda = \mu = \varpi = 0$),

$$\lambda^2 = \frac{tx}{yz}, \qquad \mu = \lambda\frac{y}{x}, \qquad \varpi = \lambda\frac{z}{x}.$$

Observant que la quadrique $G = 0$ touche évidemment la surface de Kummer aux six points de contact des quadriques A, B, C deux à deux, on déduit de cette analyse les conséquences suivantes :

Trois quadriques inscrites à la surface de Kummer, et appartenant respectivement à trois familles qui ont en commun quatre plans singuliers formant un tétraèdre de Göpel, se touchent deux à deux en deux points; les trois droites qui joignent les trois couples de points de contact sont concourantes et s'appuient respectivement sur les trois couples d'arêtes opposées du tétraèdre; de plus, en ces six points de contact, une même quadrique (celle qui est inscrite aux trois quadriques primitives) *touche la surface de Kummer.*

Inversement, *trois droites menées par un point quelconque de l'espace et s'appuyant respectivement sur les trois couples d'arêtes opposées d'un tétraèdre de Göpel de plans singuliers, coupent, au total, la surface de Kummer en douze points, qui se partagent en deux groupes de six points, situés par couple sur les trois droites considérées : les six points de chaque groupe sont les points de contact de la surface de Kummer avec une surface du second ordre* (¹).

40. Considérons maintenant deux familles de quadriques inscrites à la surface de Kummer et ayant en commun *quatre plans formant*

(¹) Ce théorème et celui du n° 36 s'appliquent, avec de simples modifications de langage, à toutes les surfaces du quatrième ordre représentées par une équation de la forme (12), puisque c'est cette forme qui a servi de base à nos calculs.

un groupe de Rosenhain; par exemple, les familles $[\alpha\beta]$ et $[\alpha\gamma]$, qui ont en commun les quatre plans $\alpha\alpha'$, $\alpha\beta'$, $\alpha\gamma'$, $\alpha\delta'$: remarquons que les quatre autres plans singuliers de la famille $[\alpha\beta]$ et les quatre autres plans de la famille $[\alpha\gamma]$, à savoir : $\beta\alpha'$, $\beta\beta'$, $\beta\gamma'$, $\beta\delta'$ et $\gamma\alpha'$, $\gamma\beta'$, $\gamma\gamma'$, $\gamma\delta'$, appartiennent à une même famille $[\beta\gamma]$, et l'on vérifie aisément que c'est là un fait général.

Cela posé, soit un des quatre plans communs aux deux familles considérées primitivement, $\alpha\alpha'$ par exemple; ce plan, associé au plan $\beta\alpha'$, forme une quadrique de la première famille, $[\alpha\beta]$, et, associé au plan $\gamma\alpha'$, une quadrique de la deuxième famille, $[\alpha\gamma]$; les deux plans $\beta\alpha'$ et $\gamma\alpha'$ forment une quadrique de la famille $[\beta\gamma]$ (n° **36**).

Désignons maintenant par $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$ les équations respectives des trois plans $\alpha\alpha'$, $\beta\alpha'$, $\gamma\alpha'$: ces trois plans se coupent au point singulier $(\delta\alpha')$, et, par suite, leurs coniques de contact avec la surface de Kummer ne peuvent être sur une même quadrique.

L'équation de la surface de Kummer pourra se mettre sous l'une des trois formes

$$L^2 - lyz = 0, \qquad M^2 - mzx = 0, \qquad N^2 - nxy = 0,$$

L, M, N, l, m, n étant des polynômes du second ordre en x, y, z, t. On pourra évidemment disposer des facteurs constants qui figurent dans ces polynômes pour qu'on ait identiquement

$$L^2 - lyz = M^2 - mzx = N^2 - nxy.$$

On en déduit

$$L^2 - M^2 = z(ly - mx),$$

ce qui montre que $L - M$ ou $L + M$ est divisible par z. On a ainsi

$$L \pm M = 2rz, \qquad M \pm N = 2px, \qquad N \pm L = 2qy,$$

p, q, r étant linéaires en x, y, z, t. Comme L, M, N ne figurent dans l'équation de la surface de Kummer que par leurs carrés, ils ne sont déterminés qu'au signe près et l'on peut écrire, sans diminuer la gé-

néralité,

$$L + M = 2rz, \qquad M + N = 2px, \qquad N \pm L = 2qy.$$

On a donc deux cas à distinguer.

Si l'on prend le signe — dans $N \pm L$, on écrira, en changeant pour la symétrie les signes de M et p,

$$L - M = 2rx, \qquad M - N = 2px, \qquad N - L = 2qy,$$

d'où

$$px + qy + rz = 0;$$

c'est-à-dire

$$2p = cy - bz, \qquad 2q = az - cx, \qquad 2r = bx - ay.$$

a, b, c désignant des constantes. On en conclut

$$L - ayz = M - bzx = N - cxy,$$

et, en appelant V la valeur commune de ces expressions, les trois formes de l'équation de Kummer deviennent

$$V^2 - l'yz = 0, \qquad V^2 - m'zx = 0, \qquad V^2 - n'xy = 0,$$

l', m', n' étant des polynômes du second ordre. On en déduit de suite

$$l' = Tx, \qquad m' = Ty, \qquad n' = Tz,$$

T étant du premier ordre, et la surface de Kummer a pour équation

$$V^2 - xyzT = 0.$$

Les trois coniques de contact des plans $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ sont sur une quadrique, $V = 0$: c'est le cas examiné plus haut, ce n'est pas celui dans lequel nous nous sommes supposés placés; nous devons donc admettre la seconde hypothèse, celle où l'on a

$$L + M = 2rz, \qquad M + N = 2px, \qquad N + L = 2qy.$$

qui donne

$$L = qy + rz - px, \qquad M = rz + px - qy, \qquad N = px + qy - rz.$$

La relation

$$L^2 - M^2 = z(ly - mx)$$

devient alors

$$4r(qy - px) = ly - mx,$$

et, de même, on a

$$4p(rz - qx) = mz - ny,$$

d'où l'on tire

$$\frac{l - 4rq}{x} = \frac{m - 4rp}{y} = \frac{n - 4pq}{z},$$

et, par suite,

$$l = \theta x + 4rq, \qquad m = \theta y + 4rp, \qquad n = \theta z + 4pq,$$

θ étant linéaire en x, y, z, t. L'équation de la surface de Kummer, $L^2 - lyz = 0$, est alors

$$(13) \qquad \theta xyz = p^2x^2 + q^2y^2 + r^2z^2 - 2pqxy - 2prxz - 2qryz.$$

Les trois familles de quadriques inscrites auxquelles appartiennent respectivement les couples de plans $yz = 0$, $zx = 0$, $xy = 0$ ont pour équations, en désignant par λ, μ, ϖ des constantes arbitraires,

$$A = \lambda^2 yz + 2\lambda(qy + rz - px) + 4rq + \theta x = 0,$$
$$B = \mu^2 zx + 2\mu(rz + px - qy) + 4pr + \theta y = 0,$$
$$C = \varpi^2 xy + 2\varpi(px + qy - rz) + 4pq + \theta z = 0;$$

car on vérifie de suite que l'enveloppe des surfaces $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ est bien la surface (13).

Ces équations montrent que toute quadrique A coupe toute quadrique B ou C suivant une droite et une cubique gauche: on a, en effet, identiquement,

$$Ay - Bx = (\lambda y + \mu x + 2r)[z(\lambda y - \mu x) + 2(qy - px)].$$

Or le plan

$$0 = \lambda y + \mu x + 2r$$

touche A, car on vérifie immédiatement que la droite de ce plan, $\lambda y + 2r = 0$, $x = 0$ est sur la quadrique A; ce plan touche de même la quadrique B. Il résulte de ces remarques et de l'identité précédente que les deux quadriques A et B ont une droite commune, située dans le plan $\lambda y + \mu x + 2r = 0$; on verrait de même que les surfaces A, B, C se coupent deux à deux suivant une droite et une cubique.

La biquadratique de contact de la surface $A = 0$ et de la surface de Kummer est donnée par les deux équations

$$\lambda yz + qy + rz - px = 0, \qquad \lambda(qy + rz - px) + 4rq + \theta x = 0.$$

Or, considérons le polynôme du troisième ordre,

$$\begin{aligned} S = {} & (\lambda yz + qy + rz - px)(2\varpi r + 2\mu q + \mu\varpi x - \theta) \\ & - (\lambda qy + \lambda rz - \lambda px + 4rq + \theta x)(\varpi y + \mu z + 2p). \end{aligned}$$

D'après la forme même de son équation, la surface cubique, $S = 0$, passe par la biquadratique de contact de la quadrique A avec la surface de Kummer : si nous développons cette équation nous trouvons

$$\begin{aligned} S = {} & + \lambda\mu\varpi xyz + \lambda yz(\mu q + \varpi r - \theta) + 2qy(\mu q - \lambda p - \varpi r) \\ & - \lambda\varpi qy^2 \quad + \mu zx(\lambda p + \varpi r - \theta) + 2rz(\varpi r - \mu q - \lambda p) \\ & - \lambda\mu rz^2 \quad + \varpi xy(\lambda p + \mu q - \theta) + 2px(\lambda p - \mu q - \varpi r) \\ & - \mu\varpi px^2 \quad - t(px + qy + rz) - 8pqr. \end{aligned}$$

On voit ainsi que S est symétrique par rapport à x, y, z; p, q, r; λ, μ, ϖ; c'est-à-dire ne change pas quand on permute x, y, z en permutant de la même manière p, q, r et λ, μ, ϖ, et laissant θ invariable : il résulte de cette remarque que la surface $S = 0$ passe par les courbes de contact de la surface de Kummer avec les *trois* quadriques A, B, C.

Cette surface cubique, $S = 0$, coupe A, en dehors de la biquadratique de contact, suivant une conique; comme on peut écrire identi-

quement

$$\begin{aligned} S = &(\lambda yz + qy + rz - px) \\ &\times (\mu\varpi x + \lambda\varpi y + \lambda\mu z + 2\lambda p + 2\mu q + 2\varpi r - \theta) \\ &- A(\mu z + \varpi y + 2p), \end{aligned}$$

le plan de cette conique a pour équation

$$P = \mu\varpi x + \lambda\varpi y + \lambda\mu z + 2\lambda p + 2\mu q + 2\varpi r - \theta = 0.$$

Cette équation est encore symétrique en x, y, z; p, q, r; λ, μ, ϖ; il en résulte que les trois coniques suivant lesquelles la surface $S = 0$ coupe les trois quadriques A, B, C sont dans un même plan, $P = 0$.

Or la section de la surface $S = 0$ par ce plan est du troisième degré; on déduit de là, en se rappelant que les quadriques A, B, C se coupent deux à deux suivant une droite et une cubique, que le plan $P = 0$ coupe $S = 0$ suivant trois droites, qui sont les droites communes aux surfaces A, B, C prises deux à deux.

Ce résultat peut d'ailleurs se vérifier directement sans difficulté.

On a ainsi les propositions suivantes :

Soient deux familles, F_1 et F_2, *de quadriques inscrites à la surface de Kummer, ayant en commun quatre plans singuliers formant un groupe de Rosenhain; les quatre autres plans singuliers de chacune de ces familles appartiennent à une troisième famille* F_3.

Trois quadriques inscrites quelconques, appartenant respectivement à ces trois familles, se coupent deux à deux suivant une droite et une cubique gauche; les trois droites, communes à ces quadriques prises deux à deux, sont dans un même plan.

Les biquadratiques de contact des trois quadriques avec la surface de Kummer sont sur une même surface du troisième ordre, qui passe en outre par les trois droites précédentes (¹).

41. *Remarque.* — Les notations que nous avons adoptées pour

(¹) On a des propriétés semblables pour les surfaces du quatrième ordre dont l'équation peut se mettre sous la forme (13).

représenter les plans singuliers de la surface de Kummer sont liées d'une manière très étroite à l'algorithme de Hesse pour la représentation des bitangentes d'une courbe plane du quatrième ordre.

Soient huit caractères, 1, 2, 3, 4, 1′, 2′, 3′, 4′ : combinés deux à deux sans distinction entre les caractères accentués et ceux non accentués, ils donnent vingt-huit symboles, 12, 13, ..., 11′, ..., 3′4′, qui, dans la notation de Hesse, représentent respectivement les vingt-huit bitangentes d'une quartique, et les symboles peuvent être appliqués aux bitangentes de manière à vérifier les conditions suivantes.

On sait que la courbe du quatrième ordre admet soixante-trois systèmes de coniques inscrites, c'est-à-dire la touchant chacune en quatre points; chacun de ces systèmes comprend six couples de bitangentes, qui, dans la notation de Hesse, correspondent à deux types de symboles.

Dans le premier type, on obtient les six couples de bitangentes en divisant les huit caractères en deux groupes de quatre, et en combinant deux à deux les caractères de chaque groupe; ainsi, en partant de la division 1231′, 42′3′4′, on obtient les six couples 12,31′; 13,21′; 11′,23; 42′,3′4′; 43′,2′4′; 44′,2′3′.

Le système de coniques inscrites correspondant, c'est-à-dire le système auquel appartiennent les six couples précédents, pourra se désigner par [1231′].

Dans le second type, on obtient les six couples de bitangentes d'un même système en combinant deux des caractères, 1 et 2 par exemple, avec les six autres, ce qui donne les six couples 12,23; 14,24; 11′,21′; 12′,22′; 13′,23′; 14′,24′, et le système de coniques inscrites correspondant pourra se désigner par le symbole [12].

Cela posé, la relation entre la notation de Hesse et la nôtre est la suivante : la section de la surface de Kummer par un plan admet pour tangentes doubles les intersections de ce plan avec les seize plans singuliers; on peut appliquer la notation de Hesse, de telle sorte que ces seize bitangentes aient les mêmes symboles que les seize plans singuliers correspondants dans notre notation.

Ainsi la bitangente située dans le plan 11′ aura la notation 11′. On vérifie cette règle sans difficulté, en partant des propriétés des familles de quadriques inscrites.

On voit aussi que les notations, dans le système de Hesse, des trente familles de coniques inscrites qui sont les sections, par le plan considéré, des trente familles de quadriques inscrites à la surface de Kummer, coïncident avec les notations que nous avons proposées pour ces familles de quadriques.

CHAPITRE IV.

Sextiques et surfaces inscrites du troisième ordre.

42. Il y a, sur la surface de Kummer, trente-deux familles de courbes du sixième ordre ou *sextiques*, se partageant en deux groupes de seize familles chacun (n° **30**).

Les courbes du premier groupe, que nous allons tout d'abord étudier, sont les intersections de la surface de Kummer avec des quadriques menées par une des seize coniques singulières; à chaque conique singulière correspond ainsi une famille de sextiques, que nous représenterons par le symbole même de cette conique, $\alpha\alpha'$.

L'équation générale des sextiques d'une famille $\alpha\alpha'$ est de la forme (n° **30**)

$$\lambda_1\theta_1 + \lambda_2\theta_2 + \lambda_3\theta_3 + \lambda_4\theta_4 + \lambda_5\theta_5 = 0,$$

les λ étant des constantes arbitraires et les θ des fonctions thêta normales, du troisième ordre, de même caractéristique, simultanément paires ou impaires, qui s'annulent pour les six demi-périodes correspondant aux points singuliers du plan $\alpha\alpha'$, points qui sont situés sur toutes les sextiques de la famille $\alpha\alpha'$.

Un plan singulier, autre que $\alpha\alpha'$, passe par deux des points singuliers situés dans ce plan; il en résulte, par la répétition d'un raisonnement fait au n° **37**, que toutes les sextiques de la famille $\alpha\alpha'$ touchent en *deux* points chacun des quinze plans singuliers autres que $\alpha\alpha'$.

Le long de chaque sextique de la famille on peut inscrire à la surface de Kummer une surface cubique (n° **17**), qui, d'après ce qui précède, touchera en *deux* points les plans singuliers, le plan $\alpha\alpha'$ excepté, c'est-à-dire aura une droite dans chacun de ces plans.

Deux sextiques de la famille $\alpha\alpha'$ se coupent en six points en dehors des six points singuliers qui leur sont communs; en effet, les deux fonctions Θ correspondantes ont $2.3.3 = 18$ zéros communs; si l'on retranche les six demi-périodes relatives aux six points singuliers du plan $\alpha\alpha'$, il reste douze zéros, deux à deux égaux et de signes contraires, qui donnent six points de la surface de Kummer.

Ces six derniers points sont sur une conique, car les deux quadriques qui passent respectivement par les deux sextiques considérées se coupent, en dehors de la conique $\alpha\alpha'$, suivant une deuxième conique.

Les surfaces du troisième ordre inscrites à la surface de Kummer le long des deux sextiques précédentes se touchent donc en six points, situés dans un même plan, et ont, par suite, en commun, dans ce plan, une courbe du troisième ordre.

Parmi les surfaces cubiques inscrites le long des sextiques de la famille $\alpha\alpha'$, et que nous appellerons *surfaces inscrites* de la famille $\alpha\alpha'$, figurent des groupes de trois plans singuliers : on les obtient en menant par la conique $\alpha\alpha'$ des quadriques coupant la surface de Kummer suivant trois nouvelles coniques; les plans de ces trois coniques forment évidemment une surface cubique inscrite de la famille $\alpha\alpha'$. Le nombre de ces surfaces décomposables est, d'après cela (n° **25**), égal au nombre des groupes de Göpel qui comprennent le plan singulier $\alpha\alpha'$: comme il y a soixante groupes de Göpel, chaque plan singulier appartient à $\frac{4.60}{15} = 15$ de ces groupes, et il y a, dans la famille $\alpha\alpha'$, 15 surfaces cubiques inscrites composées de trois plans singuliers.

Une quelconque de ces surfaces décomposables a, comme on vient de le dire, une cubique plane commune, avec une surface cubique inscrite de la famille $\alpha\alpha'$: cette cubique plane se décompose nécessairement en trois droites; en d'autres termes, on peut dire que les quinze droites qu'une surface cubique inscrite de la famille $\alpha\alpha'$ a respectivement dans les quinze plans singuliers autres que le plan $\alpha\alpha'$ sont réparties trois à trois dans quinze plans [1].

---

[1] Ces quinze droites forment la figure obtenue en enlevant parmi les vingt-sept droites d'une surface cubique, douze droites d'un même double-six.

Voici quelques propositions géométriques relatives à ces quinze plans, qui sont des *plans tritangents* de la surface cubique inscrite considérée.

Soient $\vartheta(u, v)$ la fonction du premier ordre qui correspond au plan $\alpha\alpha'$; Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4 les quatre fonctions normales du second ordre à caractéristique nulle qui sont proportionnelles aux coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 d'un point de la surface de Kummer.

Les fonctions Θ, d'ordre trois, qui correspondent aux sextiques $\alpha\alpha'$, ont (n° **29**) même caractéristique que la fonction ϑ, et sont paires ou impaires en même temps qu'elle; il en résulte qu'on obtiendra quatre de ces fonctions, linéairement indépendantes, en multipliant Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4 par ϑ. Si maintenant nous désignons par θ_3 une autre fonction du troisième ordre, de même caractéristique, et paire ou impaire en même temps que ϑ, l'équation d'une sextique $\alpha\alpha'$ sera de la forme

$$(1) \qquad \theta_3 = \lambda_1\vartheta\Theta_1 + \lambda_2\vartheta\Theta_2 + \lambda_3\vartheta\Theta_3 + \lambda_4\vartheta\Theta_4,$$

les λ étant des constantes.

Soit une autre sextique

$$(1') \qquad \theta_3 = \lambda'_1\vartheta\Theta_1 + \lambda'_2\vartheta\Theta_2 + \lambda'_3\vartheta\Theta_3 + \lambda'_4\vartheta\Theta_4,$$

il vient, en retranchant ces équations membre à membre,

$$0 = [(\lambda_1 - \lambda'_1)\Theta_1 + \ldots + (\lambda_4 - \lambda'_4)\Theta_4]\vartheta.$$

Le plan

$$(\lambda_1 - \lambda'_1)x_1 + (\lambda_2 - \lambda'_2)x_2 + (\lambda_3 - \lambda'_3)x_3 + (\lambda_4 - \lambda'_4)x_4 = 0$$

est donc celui qui passe par les six points non singuliers communs aux deux sextiques (1) et (1').

La seconde sextique se décompose en trois coniques singulières pour quinze systèmes de valeurs des λ'; pour un de ces systèmes de valeurs, le plan précédent étant, d'après ce qui a été dit plus haut, un plan tritangent de la surface cubique inscrite le long de la sextique (1), il s'ensuit que quinze des plans tritangents de cette surface auront des équa-

tions de la forme

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = A_i \quad (i = 1, 2, \ldots, 15),$$

les A_i étant des fonctions linéaires des x, dont les coefficients ne dépendent pas de λ_1, λ_2, λ_3, λ_4.

Ces équations sont linéaires en $\lambda_1, \ldots, \lambda_4$, et, en retranchant membre à membre deux quelconques d'entre elles, on trouve une expression indépendante de λ; les quinze plans se coupent donc deux à deux sur des plans fixes, $A_i - A_j = 0$; quant au fait que les λ figurent linéairement, on peut en déduire aussi quelques conséquences géométriques. En effet, l'équation de la quadrique qui passe par la conique $\mathfrak{S} = 0$ et par la sextique donnée par la relation (1) s'obtient en multipliant les deux membres de cette relation par $\mathfrak{S}$ et en remplaçant ensuite les fonctions $\mathfrak{S}\theta_5$, $\mathfrak{S}^2\Theta_1$, ... par leurs expressions en fonction quadratique de x_1, x_2, x_3, x_4 : cette équation est donc linéaire par rapport aux λ, et de la forme

$$(2) \qquad R_2 = (\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4) R_1;$$

les R sont des polynômes en x, de degré égal à l'indice; $R_1 = 0$ est le plan de la conique $\mathfrak{S} = 0$. Donc, si l'on établit entre les λ deux relations linéaires, homogènes ou non, à coefficients constants, cela revient à écrire que la quadrique (2) passe, en outre, par deux points fixes de l'espace, et réciproquement; si l'on établit trois relations linéaires entre les λ, on exprime de même que la quadrique précédente passe par trois points fixes, et réciproquement. Les équations des quinze plans tritangents, si l'on y remplace deux ou trois des λ en fonction linéaire des autres, deviennent alors

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 = A_i + P_3 \quad \text{dans le premier cas,}$$

et

$$\lambda_1 Q_1 = A_i + Q_2 \quad \text{dans le second,}$$

les P et Q étant linéaires en x_1, x_2, x_3, x_4 et restant les mêmes dans les quinze équations. Donc, dans le premier cas les quinze plans tritangents pivotent respectivement autour de quinze points fixes qui

sont sur la droite $P_1 = 0$, $P_2 = 0$; et dans le second cas, autour de quinze droites fixes, qui sont dans le plan $Q_1 = 0$. D'ailleurs l'équation (2) de la quadrique devient

$$R_2 + R_1 P_3 = (\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2) R_1 \quad \text{dans le premier cas,}$$

et

$$R_2 + R_1 Q_2 = \lambda_1 Q_1 R_1 \quad \text{dans le second.}$$

On voit ainsi que les deux points fixes par lesquels passe cette quadrique, dans le premier cas, sont sur la droite $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, et que les trois points fixes par lesquels elle passe, dans le second, sont dans le plan $Q_1 = 0$.

43. Nous ne pousserons pas plus loin l'étude du premier groupe de sextiques et de surfaces cubiques inscrites, et nous énoncerons les propriétés que nous venons d'établir, dans le résumé suivant :

Soit C *une conique de la surface de Kummer; les quadriques menées par* C *coupent en outre la surface suivant une famille quatre fois infinie de sextiques, le long de chacune desquelles on peut inscrire à la surface de Kummer une surface du troisième ordre.*

Deux de ces surfaces inscrites se touchent en six points situés sur une conique et ont en commun une cubique plane dans le plan de cette conique.

Toute surface cubique inscrite, de la famille considérée, a une droite dans chacun des plans singuliers de la surface de Kummer autres que le plan de la conique C; *ces quinze droites sont trois à trois dans quinze nouveaux plans, qui sont, par suite, des plans tritangents de la surface cubique.*

Pour une surface cubique inscrite, variant dans la même famille, les quinze plans tritangents ainsi définis se coupent deux à deux sur des plans fixes.

Par la conique C *et par deux points* A *et* B *de l'espace, faisons passer des quadriques, et considérons, le long des courbes qu'elles découpent sur la surface de Kummer, les surfaces cubiques inscrites à celle-ci : pour chacune de ces surfaces, les quinze plans tritan-*

gents définis plus haut pivotent respectivement autour de quinze points, alignés sur la droite AB.

Si les quadriques qui passent par la conique C *passent par trois points de l'espace* A, B, D, *les quinze plans précédents pivotent respectivement autour de quinze droites, situées dans le plan des points* A, B, D.

44. Arrivons maintenant à l'étude du *second groupe de familles de sextiques* qu'on peut tracer sur la surface de Kummer.

Chacune de ces familles s'obtient par l'intersection de la surface avec des surfaces du troisième ordre menées par trois coniques singulières qui ont un point singulier commun; soit $\mathfrak{S} = 0$ l'équation de la conique $\alpha\alpha'$ qui forme avec les trois précédentes un groupe de Rosenhain; l'équation des sextiques de la famille considérée sera (n° **29**) de la forme

$$\lambda_1\theta_1 + \lambda_2\theta_2 + \lambda_3\theta_3 + \lambda_4\theta_4 = 0, \tag{3}$$

les λ étant des constantes et les θ des fonctions normales, d'ordre trois, de même caractéristique que $\mathfrak{S}$, toutes impaires si $\mathfrak{S}$ est pair, et toutes paires si $\mathfrak{S}$ est impair.

Ces courbes passent (n° **29**) par les dix points singuliers qui ne sont pas dans le plan $\alpha\alpha'$; chacun des quinze plans singuliers autres que $\alpha\alpha'$ les coupe donc en quatre points singuliers et les touche par suite en un point; quant au plan $\alpha\alpha'$, il les touche évidemment en trois points, situés sur la conique $\alpha\alpha'$.

Les surfaces cubiques, inscrites le long des sextiques considérées, passent donc par les dix points singuliers qui ne sont pas dans le plan $\alpha\alpha'$, et admettent ce plan pour plan tritangent, les trois points de contact étant sur la conique $\alpha\alpha'$; elles touchent en un point les quinze autres plans singuliers.

Deux sextiques de la famille (3) *se coupent*, en dehors des dix points singuliers qui leur sont communs, *en quatre points :* en effet, les premiers membres des équations des deux courbes ont, d'après la formule de M. Poincaré, $2.3.3 = 18$ solutions communes, parmi lesquelles figurent dix demi-périodes; les huit autres solutions, deux à

deux égales et de signes contraires, donnent quatre points de la surface de Kummer.

45. Cela posé, soient $S_1 = 0$, $S_2 = 0$ les surfaces cubiques inscrites à la surface de Kummer le long de deux sextiques, s_1 et s_2; $S = 0$ la surface cubique qui passe par ces deux courbes; on a identiquement (n° **34**)

$$(4) \qquad S_1 S_2 - S^2 = KG,$$

G étant du second ordre par rapport aux coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4, et K désignant toujours le premier membre de l'équation de la surface de Kummer.

De cette identité découlent des conséquences nombreuses et importantes.

46. Observons d'abord que les surfaces $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S = 0$ n'ont pas, en général, de courbe commune. Pour démontrer cette proposition, il suffit de la vérifier dans un cas particulier, celui, par exemple, où la surface S_2 se décompose en trois plans singuliers, formant avec le plan $\alpha\alpha'$ un groupe de Rosenhain; on voit alors de suite que les trois surfaces n'ont pas de courbe commune.

Cela posé, l'*identité* (4) montre d'abord que les points, en nombre égal à 27, communs aux trois surfaces $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S = 0$, sont des points doubles de la surface $KG = 0$: or, ces trois surfaces passent d'abord par dix mêmes points singuliers de la surface de Kummer; de plus, elles se touchent en chacun des quatre autres points communs aux deux sextiques s_1 et s_2; il est clair, d'ailleurs, qu'elles n'ont pas d'autre point commun sur la surface de Kummer. Les points qui précèdent comptent pour $10 + 4.4 = 26$ points d'intersection; les trois surfaces $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, $S = 0$ ont donc un vingt-septième point commun, non situé sur $K = 0$, et ce point, étant un point double de la surface $KG = 0$, est un point double de la quadrique $G = 0$: celle-ci est donc un cône du second ordre.

L'*identité* (4) montre en second lieu que le cône $G = 0$ touche la surface de Kummer en chacun des quatre points communs aux deux

sextiques s_1 et s_2, en dehors des points singuliers : la proposition est évidente.

47. En troisième lieu, le cône $G = 0$, en vertu de l'*identité*, est inscrit à chacune des deux surfaces $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, le long de la courbe, non située sur $K = 0$, où cette surface, S_1 ou S_2, est coupée par $S = 0$. La courbe commune à S_1 et S comprend la sextique s_1, située sur la surface de Kummer, et une cubique gauche : le cône $G = 0$ touche donc, suivant une cubique gauche, chacune des deux surfaces S_1, S_2.

Remarquons maintenant que l'équation de la surface $S = 0$, lorsque la surface S_1 est donnée, dépend linéairement de quatre coefficients, c'est-à-dire de trois paramètres : soient, en effet,

$$\lambda_1\theta_1 + \lambda_2\theta_2 + \lambda_3\theta_3 + \lambda_4\theta_4 = 0 \quad \text{et} \quad \mu_1\theta_1 + \mu_2\theta_2 + \mu_3\theta_3 + \mu_4\theta_4 = 0$$

les deux équations des deux sextiques s_1 et s_2; la surface $S = 0$ qui passe par ces deux sextiques aura une équation de la forme

$$\Sigma\Sigma\lambda_i\mu_h A_{ih} = 0,$$

(n° **32**), les A_{ih} étant des polynômes d'ordre trois par rapport aux coordonnées. Si les λ sont donnés, cette équation est linéaire et homogène par rapport aux quatre coefficients μ_1, μ_2, μ_3, μ_4.

Il y a donc une infinité *triple* et linéaire de surfaces, $S = 0$, passant par la courbe de contact des surfaces $K = 0$ et $S_1 = 0$; comme parmi les surfaces $S = 0$ figure évidemment la surface S_1, il en résulte que les surfaces $S = 0$ découpent sur S_1 une infinité *double* de cubiques gauches variables. En d'autres termes, on peut tracer sur S_1 une double infinité de courbes le long de chacune desquelles un cône du second ordre est circonscrit : la réciproque de la surface S_1 admet donc une infinité double de coniques; c'est, par suite, d'après un théorème de M. Darboux, une surface de Steiner, et la surface S_1 est *une surface du troisième ordre à quatre points doubles* (¹).

(¹) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. IV, p. 370.

48. Ce résultat peut être retrouvé et complété par une autre voie : en effet, l'identité (4) montre que les points communs aux trois surfaces $S = 0$, $K = 0$, $G = 0$ sont des points doubles de la surface $S_1 S_2 = 0$. Or les surfaces $S = 0$, $K = 0$ se coupent suivant les deux sextiques s_1 et s_2, qui ont, en dehors des points singuliers de la surface de Kummer, quatre points communs p_1, p_2, p_3, p_4; la surface $G = 0$ passe par ces quatre points et touche, en chacun d'eux, les surfaces $S = 0$, $K = 0$, comme nous l'avons vu. Chacune des deux sextiques s_1 et s_2 coupe donc le cône $G = 0$ en $2.6 - 8 = 4$ points, différents des quatre points $p_1, \ldots, p_4$; nous obtenons ainsi, en dehors des points p_i, huit points, qui sont, d'après ce qui précède, des points doubles de la surface $S_1 S_2 = 0$. Quatre de ces points sont sur la sextique s_1, et les quatre autres sur la sextique s_2; pour démontrer que les quatre premiers sont des points doubles de S_1 et les quatre seconds des points doubles de S_2, il suffira donc d'établir que, en général, aucun d'eux n'est situé à la fois sur S_1 et sur S_2.

Or les points communs à S_1 et S_2, et situés sur la surface de Kummer, sont : 1° les quatre points $p_1, \ldots, p_4$; 2° dix points singuliers. Nous savons que les huit points trouvés plus haut diffèrent, en général, des quatre points $p_1, \ldots, p_4$; pour montrer qu'ils diffèrent des points singuliers, il suffit d'établir, puisqu'ils sont sur le cône $G = 0$, que ce cône ne passe par aucun des dix points singuliers considérés.

Soit un de ces points singuliers, que nous supposerons placé à l'origine O des coordonnées, dans le système de coordonnées cartésiennes non homogènes. La surface S_1, étant inscrite à la surface de Kummer et passant par le point O, y touche nécessairement un des plans tangents de cette dernière surface au même point. Soit $x = 0$ ce plan; soit de même $y = 0$ le plan tangent en O à la surface S_2 : ces deux plans touchent, suivant deux génératrices, le cône des tangentes de la surface de Kummer au point O, et il est clair que le plan des deux génératrices de contact touche en O la surface $S = 0$, qui passe par les deux courbes de contact des surfaces S_1 et S_2, avec la surface de Kummer : soit $z = 0$ ce troisième plan. Les termes de moindre degré dans les polynômes S_1, S_2 et S sont respectivement x, y et z; les termes de moindre degré dans $S_1 S_2 - S^2$ sont donc $xy - z^2$: l'origine est donc un point double, et seulement double, de la surface

$S_1 S_2 - S^2 = 0$, c'est-à-dire de $KG = 0$. Comme ce point est double pour la surface $K = 0$, par hypothèse, il ne saurait être sur la surface $G = 0$.

Nous voyons ainsi que la surface $S_1 = 0$ a *quatre points doubles* et que ces points sont *sur la surface de Kummer*.

49. Les propositions qu'on vient d'établir peuvent se résumer ainsi :

La surface de Kummer admet seize familles de surfaces inscrites du troisième ordre, à quatre points doubles (1).

Les points doubles de ces surfaces sont sur la surface de Kummer.

Les surfaces inscrites d'une même famille sont en nombre trois fois infini; elles passent par les dix points doubles de la surface de Kummer qui ne sont pas situés dans un des plans singuliers de cette surface, et elles admettent ce plan pour plan tritangent; elles touchent simplement les quinze autres plans singuliers.

Deux surfaces inscrites d'une même famille se touchent en quatre points de la surface de Kummer; il existe un cône du second ordre tangent à celle-ci en ces quatre points, et circonscrit à chacune des deux surfaces cubiques considérées (2).

50. *Remarque.* — Une surface du troisième ordre à quatre points doubles est, comme on sait, représentable point par point sur un plan, de telle sorte que les sections planes aient pour image des courbes du troisième ordre passant par les six sommets d'un quadrilatère complet (3). Ces sommets sont les images des droites qui joignent les

---

(1) M. Darboux a fait connaître, sans démonstration et sans détails, que la surface de Kummer admet des surfaces inscrites du troisième ordre, à quatre points doubles (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1re série, t. I, p. 355).

(2) On peut dire aussi que *deux sextiques d'une même famille, passant par dix points singuliers, se coupent en outre en quatre points : en ces quatre points les plans tangents à la surface de Kummer sont concourants, et touchent un même cône du second ordre qui passe par les quatre points.*

(3) Voir par exemple Laguerre, *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. I, p. 21.

points doubles de l'espace deux à deux, et les droites du plan sont celles des cubiques gauches le long desquelles on peut circonscrire à la surface des cônes du second ordre. Il en résulte aisément qu'une surface quelconque du troisième ordre menée par une de ces cubiques coupe, en outre, la surface à quatre points doubles suivant une sextique, dont l'image est une courbe du quatrième ordre qui passe par les six sommets du quadrilatère. La sextique de l'espace rencontre par suite en un point, distinct des points doubles, chacune des droites joignant ceux-ci deux à deux.

En faisant application de ce résultat à une surface S_1, à quatre points doubles, inscrite à la surface de Kummer, on voit que chacune des droites qui joignent les quatre points doubles deux à deux rencontre en un nouveau point la sextique de contact, et *touche* par suite en ce point la surface de Kummer.

Soient a_1, a_2, a_3, a_4 les quatre points doubles de S_1; désignons par a_{ij} le point où la droite $a_i a_j$ touche la surface de Kummer.

On sait qu'une surface cubique à quatre points doubles n'a, en dehors des droites qui joignent ceux-ci deux à deux, que trois droites, situées dans un même plan tritangent : soient p, q, r les sommets du triangle formé par ces trois droites. Le long de la droite qui joint deux points doubles, la surface admet un plan tangent unique, soit en tout six plans tangents remarquables, dont il passe deux par chacune des trois droites pq, pr, qr.

Pour la surface S_1, le plan tritangent est celui d'une conique singulière, $\alpha\alpha'$; les points p, q, r sont sur cette conique (n° 44), et il est clair que le plan tangent unique le long de la droite $a_i a_j$ touche la surface de Kummer au point a_{ij}.

Cela posé, observons que les points a_1, a_2, a_3, a_4 peuvent se déduire des points p, q, r par la construction suivante :

Pour chacune des droites pq, pr, rq, on peut mener à la surface de Kummer *deux* plans tangents distincts du plan $\alpha\alpha'$; les six points de contact de ces plans sont, d'après ce qui précède, les points a_{ij}; de plus, le plan tangent en a_{ij} contenant la droite $a_i a_j$ et, par suite, les points a_i et a_j, on voit que les six plans tangents précédents se rencontrent trois à trois, sur la surface de Kummer, en quatre points qui sont les points a_1, a_2, a_3, a_4.

Remarquons maintenant que les points p, q, r peuvent être choisis arbitrairement sur la conique $\alpha\alpha'$: on peut, en effet, par trois points quelconques de cette conique mener une sextique de la famille considérée (c'est-à-dire passant par les dix points singuliers non situés dans le plan $\alpha\alpha'$), puisque l'équation générale (3) des sextiques de la famille renferme trois paramètres; la surface cubique inscrite le long de cette sextique touchera le plan $\alpha\alpha'$ aux trois points choisis.

Donc enfin *le tétraèdre* dont les sommets sont a_1, a_2, a_3, a_4 est *inscrit par ses sommets et circonscrit par ses six arêtes à la surface de Kummer*, et il y a un nombre *triplement infini* de tels tétraèdres. Ce fait constitue un théorème : en effet, les tétraèdres inscrits à une surface dépendent de huit paramètres; en exprimant que les six arêtes touchent la surface, on a six conditions, et, par suite, le nombre des tétraèdres inscrits par leurs sommets et circonscrits par leurs arêtes à une surface quelconque est doublement infini [1].

51. Nous pouvons donc énoncer les propositions qui suivent :

Il existe seize familles de tétraèdres inscrits par leurs sommets et circonscrits par leurs arêtes à une surface de Kummer, chaque famille comprenant un nombre triplement infini de tétraèdres.

On obtient les tétraèdres d'une même famille par la construction suivante. Soient trois points quelconques d'une même conique de la surface de Kummer : par les trois droites qui les joignent deux à deux passent au total six plans tangents de la surface, distincts du plan de la conique; ces six plans se coupent trois à trois sur la surface de Kummer en quatre nouveaux points qui sont les sommets d'un des tétraèdres cherchés. Les six points de contact des arêtes du tétraèdre avec la surface coïncident avec les six points de contact des plans tangents précédents.

Les sommets d'un des tétraèdres sont les points doubles d'une surface cubique inscrite à la surface de Kummer.

---

[1] M. Klein a donné une proposition de même nature pour les tétraèdres inscrits par leurs sommets et circonscrits par leurs faces à la surface de Kummer; ces tétraèdres sont en nombre cinq fois infini (*Math. Annalen*, t. XXVII, p. 111).

Nous retrouverons ces tétraèdres par une voie analytique dans un des Chapitres suivants.

52. Les surfaces cubiques inscrites, à quatre points doubles, peuvent se réduire à des *surfaces réglées* dans le cas suivant :

Supposons que, dans le plan de la conique $\alpha\alpha'$, un des sommets, p par exemple, du triangle pqr, coïncide avec un des six points singuliers situés sur cette conique : les deux plans tangents [1] autres que $\alpha\alpha'$, menés à la surface de Kummer par la droite pq, sont confondus et leur position commune est celle du plan tangent Q, autre que $\alpha\alpha'$, qu'on peut mener par la droite pq au cône des tangentes au point p. Il en est de même des deux plans tangents passant par pr, qui sont confondus en un plan R, et, par suite, les quatre points doubles de la surface cubique inscrite correspondant au triangle pqr, sont deux à deux confondus et se réduisent ainsi aux deux points distincts, non singuliers, où la surface de Kummer est coupée par la droite D, commune aux plans Q et R. Cette surface cubique passant, d'ailleurs, comme dans le cas général, par les droites pq et pr, et passant évidemment aussi par la droite D, a un nouveau point double au point p, commun à ces trois droites, puisque celles-ci ne sont pas dans un même plan. Il en résulte que la droite D, sur laquelle la surface a trois points doubles, est une *droite double* de cette surface, qui se réduit dès lors à une *surface réglée du troisième ordre*.

La directrice rectiligne simple que rencontrent toutes les droites de la surface est évidemment qr.

Ce résultat peut s'énoncer ainsi :

Parmi les surfaces cubiques d'une même famille inscrites à la surface de Kummer et passant par les dix points doubles non situés dans un plan singulier, P, *celles qui passent, en outre, par un quelconque des six points doubles situés dans ce plan sont des surfaces réglées : pour chacune d'elles, la directrice double passe par le point double considéré, la directrice simple est dans le plan* P.

---

[1] Nous admettons ici, ce qui est d'ailleurs évident, que la surface de Kummer est de quatrième classe; nous l'avons déjà admis au n° 50.

La liaison entre la directrice double et la directrice simple est celle qui a été indiquée plus haut, entre les droites D et qr.

Les génératrices rectilignes d'une de ces surfaces réglées inscrites sont évidemment des bitangentes de la surface de Kummer.

CHAPITRE V.

Courbes du huitième ordre et surfaces inscrites du quatrième ordre.

33. Les trente-deux familles de *courbes du huitième ordre* situées sur la surface de Kummer se divisent, d'après la théorie générale du n° **28**, en *trois groupes :*

1° Les courbes suivant lesquelles la surface est coupée par les quadriques de l'espace. Ces courbes ne présentent aucune particularité intéressante.

2° La famille que nous avons appelée *singulière* (n° **30**), et qui est formée de courbes passant par les seize points doubles de la surface de Kummer; nous l'étudierons en dernier lieu.

3° *Trente* familles, deux à deux associées, de courbes passant par huit points doubles, et dont nous allons nous occuper maintenant.

34. L'équation des courbes de l'une de ces trente familles est (n° **30**) de la forme

$$(5) \qquad \lambda_1\theta'_1 + \lambda_2\theta'_2 + \ldots + \lambda_8\theta'_8,$$

les λ étant des constantes arbitraires, et les θ' des fonctions d'ordre quatre, normales, toutes paires ou toutes impaires, de même caractéristique non nulle.

Il est aisé de voir qu'on peut exprimer ces fonctions à l'aide des fonctions normales du second ordre.

Soient, en effet, θ_1 et θ_2 deux fonctions quelconques, linéairement indépendantes, d'ordre deux, ayant même caractéristique que les θ', et paires ou impaires selon que les θ' sont pairs ou impairs; soient

toujours Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4 les fonctions normales d'ordre deux, de caractéristique nulle, qui sont proportionnelles aux coordonnées d'un point de la surface de Kummer; les huit fonctions

$$\begin{array}{llll} \theta_1\Theta_1, & \theta_1\Theta_2, & \theta_1\Theta_3, & \theta_1\Theta_4, \\ \theta_2\Theta_1, & \theta_2\Theta_2, & \theta_2\Theta_3, & \theta_1\Theta_4 \end{array}$$

sont d'ordre quatre; elles ont même caractéristique que les θ' et sont paires ou impaires en même temps que ces dernières fonctions. De plus, elles sont linéairement indépendantes, car, s'il existait une relation de la forme

$$\theta_1(a_1\Theta_1 + a_2\Theta_2 + a_3\Theta_3 + a_4\Theta_4) + \theta_2(b_1\Theta_1 + \ldots + b_4\Theta_4) = 0,$$

on en déduirait que la courbe $\theta_1 = 0$, qui est une biquadratique quelconque, différente de la courbe $\theta_2 = 0$, serait dans le plan

$$b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 = 0,$$

ce qui est impossible.

Par conséquent, les huit fonctions θ' sont des combinaisons linéaires et homogènes des huit fonctions $\theta_h\Theta_l$ précédentes, et l'équation générale des courbes du huitième ordre de la famille considérée sera de la forme

$$(6) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \theta_1(a_1\Theta_1 + a_2\Theta_2 + a_3\Theta_3 + a_4\Theta_4) \\ + \theta_2(b_1\Theta_1 + b_2\Theta_2 + b_3\Theta_3 + b_4\Theta_4) = 0, \end{array} \right.$$

les a et b étant des constantes arbitraires.

Cette forme met en évidence une propriété importante des courbes correspondantes : c'est que chacune de celles-ci admet *une sécante quadruple*, ayant pour équations

$$P = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0,$$
$$Q = b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 = 0,$$

et que tout plan, $\lambda P + \mu Q = 0$, mené par cette sécante, coupe en

outre la courbe en quatre points situés sur une même biquadratique, $\mu\theta_1 - \lambda\theta_2 = 0$.

Il est aisé de voir que la courbe étudiée n'a qu'*une seule sécante quadruple*. En effet, cette courbe est (n° **30**) sur une surface du troisième ordre, passant par deux coniques C_1 et C_2 de la surface de Kummer. Les deux coniques C_1 et C_2, se coupant en deux points, sont rencontrées l'une ou l'autre par vingt-six des droites de la surface cubique; la vingt-septième droite est celle qui s'appuie sur les deux droites (concourantes) situées dans les plans de C_1 et C_2; elle ne rencontre ni C_1 ni C_2 et coupe, par suite, la surface de Kummer en quatre points qui sont sur la courbe proposée. Inversement, toute droite coupant cette courbe en quatre points doit être sur la surface du troisième ordre, et, par suite, il n'existe, comme nous l'avions annoncé, qu'une seule sécante quadruple.

L'analyse conduirait aisément au même résultat.

35. Les courbes de la famille (6) passent par les huit points singuliers de la surface de Kummer qui sont communs aux couples d'un octaèdre de Göpel (n° **30**); donc chacune d'elles *touche en deux points* non singuliers *les plans de cet octaèdre*, et *en trois points* non singuliers *les plans de l'octaèdre associé*.

Deux courbes de la famille se rencontrent, en dehors des huit points singuliers qui leur sont communs en $\frac{1}{2}[2.4.4 - 8] = 12$ points de la surface de Kummer; on le démontre à l'aide de la formule de M. Poincaré en répétant un raisonnement fait plusieurs fois.

Les douze points non singuliers communs aux deux courbes

$$(6) \qquad \theta_1(a_1\Theta_1 + \ldots + a_4\Theta_4) + \theta_2(b_1\Theta_1 + \ldots + b_4\Theta_4) = 0,$$

$$(6') \qquad \theta_1(a'_1\Theta_1 + \ldots + a'_4\Theta_4) + \theta_2(b'_1\Theta'_1 + \ldots + b'_4\Theta'_4) = 0$$

sont sur la quadrique $PQ' - QP' = 0$, P et Q ayant la signification indiquée plus haut, et P′, Q′ étant définis de la même manière avec les a' et les b'.

Le long de chaque courbe (6) on peut inscrire à la surface de Kummer une infinité de *surfaces du quatrième ordre* formant un

faisceau ponctuel, et *touchant*, d'après ce qui précède, *huit des plans singuliers en deux points et les huit autres en trois points.*

56. Parmi ces surfaces inscrites du quatrième ordre il en est de particulièrement intéressantes, que l'on obtient comme il suit.

Nous savons (n° **16**) que les fonctions θ_1^2, $\theta_1\theta_2$, θ_2^2 sont des fonctions quadratiques entières de Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4, que nous désignerons respectivement par A_1, A_{12} et A_2; élevons maintenant au carré l'expression

$$\theta_1(a_1\Theta_1 + \ldots + a_4\Theta_4) + \theta_2(b_1\Theta_1 + \ldots + b_4\Theta_4),$$

et remplaçons, dans le développement θ_1^2, $\theta_1\theta_2$, θ_2^2 par leurs valeurs précédentes, en substituant à Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4 les coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4; nous obtenons une expression S

$$S = A_1P^2 + 2A_{12}PQ + A_2Q^2$$

qui, égalée à zéro, représente une surface du quatrième ordre, $S = 0$, inscrite à la surface de Kummer le long de la courbe (6).

Cette surface a la *droite double* $P = 0$, $Q = 0$, qui est la sécante quadruple de la courbe de contact.

L'enveloppe des surfaces $S = 0$, c'est-à-dire la surface de Kummer, a évidemment pour équation

$$A_{12}^2 - A_1A_2 = 0.$$

Les surfaces du quatrième ordre qui touchent la surface de Kummer, le long de la même courbe que la surface $S = 0$, ont pour équation

$$(7) \qquad A_1P^2 + 2A_{12}PQ + A_2Q^2 + \lambda(A_{12}^2 - A_1A_2) = 0,$$

λ étant une constante arbitraire. Cette équation peut s'écrire, au facteur près $-\frac{1}{\lambda}$,

$$(Q^2 - A_1\lambda)(P^2 - A_2\lambda) - [A_{12}\lambda + PQ]^2 = 0,$$

ce qui montre que, si λ n'est ni nul ni infini, la surface (7) a *huit*

points doubles situés sur les trois quadriques

$$Q^2 - A_1\lambda = 0, \qquad P^2 - A_2\lambda = 0, \qquad A_{12}\lambda + PQ = 0.$$

Ces huit points sont d'ailleurs sur la surface $A_{12}^2 - A_1 A_2 = 0$, c'est-à-dire sur la surface de Kummer : on le voit en éliminant P, Q et λ entre les trois dernières équations.

37. De toute cette analyse résultent les énoncés suivants :

Soit F *une des trente familles de courbes du huitième ordre déterminées, sur la surface de Kummer, par des surfaces cubiques passant par deux coniques singulières; les courbes de la famille* F *passent toutes par huit points singuliers, situés sur les couples de plans d'un même octaèdre de Göpel; elles touchent en deux points non singuliers les plans de cet octaèdre et en trois points non singuliers les plans de l'octaèdre associé.*

Toute courbe de la famille F *a une et une seule sécante quadruple; chaque plan mené par cette sécante coupe en outre la courbe en quatre points qui sont situés sur une biquadratique de la surface de Kummer, passant par les huit points singuliers communs aux courbes de la famille* F.

Deux courbes de la famille ont, en dehors des points singuliers, douze points communs qui sont situés sur une quadrique passant en outre par les deux sécantes quadruples des deux courbes.

Le long de chaque courbe de la famille on peut inscrire à la surface de Kummer une infinité de surfaces d'ordre 4, *formant un faisceau, et qui ont chacune, sur la courbe considérée, huit points doubles, variables d'une surface à l'autre.*

Parmi ces surfaces, il en est une qui a pour droite double la sécante quadruple de la courbe considérée, sans avoir généralement de point multiple en dehors de cette droite.

38. Il nous reste à étudier les courbes du huitième ordre appartenant à la *famille singulière*, c'est-à-dire (n° **30**) déterminées sur la surface de Kummer par une surface du quatrième ordre, menée par les quatre coniques singulières d'un groupe de Rosenhain.

Dans les paragraphes qui vont suivre, nous nous bornerons à une étude sommaire, nous réservant de revenir, par d'autres méthodes, sur ces courbes intéressantes.

Les courbes du huitième ordre de la famille singulière *passent par les seize points singuliers* de la surface de Kummer et, par suite, *touchent* en un point mobile *chacun des seize plans singuliers*.

Réciproquement, toute courbe du huitième ordre tracée sur la surface de Kummer et passant simplement par les seize points doubles, appartient à la famille singulière (n° **31**).

Deux courbes de la famille se coupent, comme on le voit par la formule de M. Poincaré, *en* $\frac{1}{2}(2.4.4-16)=8$ *points mobiles*.

Soient $S_1=0$ et $S_2=0$ deux surfaces du quatrième ordre, circonscrites à la surface de Kummer le long de deux courbes s_1 et s_2 de la famille singulière; $S=0$ une surface du même ordre passant par ces deux courbes (n^{os} **34**); on a identiquement

$$S_1 S_2 = S^2 + KG,$$

G étant un polynôme d'ordre 4 en x_1, x_2, x_3, x_4. Cette identité montre que les points communs aux surfaces $S=0$, $K=0$, $G=0$, sont des points doubles de la surface $S_1 S_2 = 0$.

Or on démontre sans difficulté, en appliquant les méthodes suivies aux n^{os} **46-48**, que les trois surfaces $S=0$, $S_1=0$, $S_2=0$ n'ont pas, en général, de courbe commune, et que la surface $G=0$ ne passe pas par les points singuliers de la surface de Kummer.

Cela posé, nous savons que la surface $S=0$ coupe $K=0$ suivant deux courbes s_1 et s_2 d'ordre 8, qui passent par les seize points singuliers et ont huit autres points communs $p_1, p_2, \ldots, p_8$: en ces huit derniers points, les surfaces $S_1=0$, $S_2=0$, $S=0$, $K=0$, $G=0$ sont tangentes, comme le montre l'identité précédente; la courbe s_1 touche donc en chacun d'eux la surface $G=0$, qu'elle coupe par suite en $4.8-2.8=16$ points distincts des points $p_1, p_2, \ldots, p_8$. Ces seize nouveaux points sont, d'après ce qui a été dit, des points doubles de la surface $S_1 S_2 = 0$; ils ne sont pas situés sur la surface $S_2=0$, car la courbe s_1 ne rencontre cette dernière qu'aux points $p_1, p_2, \ldots, p_8$ et aux seize points singuliers de la surface de Kummer; ils sont donc des

points doubles de la surface $S_1 = 0$. Celle-ci est donc une surface du quatrième ordre à *seize points doubles*, c'est-à-dire une surface de Kummer; les seize points doubles sont sur la surface de Kummer primitive.

Donc :

Les surfaces générales du quatrième ordre inscrites à la surface de Kummer le long des courbes du huitième ordre de la famille singulière sont des surfaces de Kummer, ayant leurs seize points doubles sur la surface de Kummer primitive.

D'après cela, la courbe de contact des deux surfaces de Kummer passe par les points doubles de la seconde, comme elle passait déjà par les points doubles de la première; il en résulte qu'elle appartient à la famille singulière sur l'une et sur l'autre, et qu'elle touche les plans singuliers des deux surfaces. En d'autres termes :

Deux surfaces de Kummer étant inscrites l'une à l'autre, les points singuliers de l'une sont sur l'autre, et les plans singuliers de l'une touchent l'autre en des points situés sur la courbe de contact.

On peut compléter ces résultats en établissant, par la méthode suivie au n° **46**, que la surface G est aussi une surface du quatrième ordre à seize points doubles, c'est-à-dire une surface de Kummer; elle est circonscrite à S_1 et S_2, les courbes de contact étant sur S.

M. Klein est arrivé, par des considérations fondées sur la *Liniengeometrie* à démontrer l'existence des surfaces de Kummer inscrites à une surface de Kummer donnée; il en a déduit des conséquences nombreuses et remarquables pour la configuration que forment, sur cette dernière, les seize points ou les seize plans singuliers d'une surface de Kummer inscrite ([1]). Nous n'insisterons donc pas sur un sujet traité à fond par l'éminent géomètre; nous nous bornerons, plus tard, à examiner certains cas particuliers dans lesquels les surfaces de Kummer inscrites dégénèrent en surfaces à lignes multiples.

([1]) Klein, *Math. Annalen*, t. XXVII; *Configurationen bei der Kummers'chen Fläche.*

CHAPITRE VI.

Sections de la surface de Kummer par ses plans tangents.

59. Soit $\mathfrak{F}(u, v)$ la fonction normale du premier ordre de caractéristique $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$, qui s'annule (n° **7**) pour les six demi-périodes

$$0,\ 0;\quad 0,\ \pi i;\quad \frac{b}{2},\ \pi i + \frac{c}{2};\quad \pi i + \frac{b}{2},\ \frac{c}{2};$$

$$\frac{a}{2} + \frac{b}{2},\ \frac{b}{2} + \frac{c}{2};\quad \pi i + \frac{a}{2} + \frac{b}{2},\ \frac{b}{2} + \frac{c}{2}.$$

Si l'on désigne par λ et μ deux constantes, la fonction

$$\theta(u, v) = \mathfrak{F}(u - \lambda, v - \mu)\mathfrak{F}(u + \lambda, v + \mu)$$

est une fonction paire de u et v, puisque $\mathfrak{F}(u, v)$ est une fonction impaire. D'ailleurs $\theta(u, v)$ est évidemment une fonction *normale*, du second ordre, à caractéristique nulle; elle est donc exprimable linéairement en fonction des coordonnées d'un point de la surface de Kummer, et, par suite, la courbe $\theta(u, v) = 0$ est une section plane de cette surface. Cette courbe a évidemment un point double, car, d'après la formule de M. Poincaré, les équations

$$\mathfrak{F}(u + \lambda, v + \mu) = 0, \qquad \mathfrak{F}(u - \lambda, v - \mu) = 0$$

ont, en u et v, deux solutions communes, égales et de signes contraires, auxquelles correspond un seul point de la surface de Kummer : les coordonnées u, v de ce point annulant $\theta(u, v)$ et ses deux premières dérivées sont celles d'un point double. La courbe est donc la section de la surface par un de ses plans tangents; réciproquement, étant donné un point u_0, v_0, si l'on détermine λ et μ (ce qui est possible d'une seule manière, les solutions λ, μ et $-\lambda$, $-\mu$ étant considérées comme identiques), par les équations

$$\mathfrak{F}(\lambda + u_0, \mu + v_0) = 0, \qquad \mathfrak{F}(\lambda - u_0, \mu - v_0) = 0,$$

il est clair que le point u_0, v_0 sera le point double de la courbe

$$\vartheta(u+\lambda, v+\mu)\vartheta(u-\lambda, v-\mu)=0.$$

Les courbes $\theta(u, v)=0$ *sont donc les sections de la surface de Kummer par ses plans tangents.*

A un système de valeurs des deux arguments hyperelliptiques λ, μ correspond ainsi un plan tangent de la surface de Kummer; réciproquement, à un plan tangent correspondent deux systèmes d'arguments, de la forme λ, μ et $-\lambda$, $-\mu$.

60. Le fait que le premier membre de l'équation de la section de la surface par un plan tangent se décompose en deux facteurs ϑ du premier ordre est fondamental.

Soit, en effet, un plan tangent quelconque donné; choisissons un des deux systèmes d'arguments λ, μ et $-\lambda$, $-\mu$, qui lui correspondent, et considérons l'équation

$$(1) \qquad \vartheta(u-\lambda, v-\mu)=0.$$

Un point de la section de la surface par ce plan tangent a deux systèmes d'arguments u, v et $-u$, $-v$ (à des périodes près); de ces deux systèmes, *un seul* satisfait à l'équation précédente; on voit ainsi qu'à un point de la courbe (1) ne correspond qu'*un seul* système de valeurs des arguments u, v, à des multiples près des périodes.

Il résulte de là que *les deux courbes*

$$\vartheta(u-\lambda, v-\mu)=0, \qquad \vartheta(u-\lambda', v-\mu')=0$$

se correspondent point par point. Soient, en effet, u, v un point de la première et u', v' un point de la seconde : on peut établir entre les points des deux courbes la correspondance

$$(2) \qquad u-\lambda=u'-\lambda', \qquad v-\mu=v'-\mu',$$

car, lorsque le point u, v décrit la première, le point u', v' décrit la seconde. Or à un point de la première courbe correspond un seul sys-

tème de valeurs de u, v à des périodes près, et, par suite, d'après les formules précédentes, un seul système de valeurs de u', v', c'est-à-dire un seul point de la seconde courbe, et réciproquement.

Les sections de la surface par ses plans tangents sont donc des courbes de même genre et de mêmes modules; or, pour une courbe du quatrième ordre à un point double, on sait que les modules sont les rapports anharmoniques des six tangentes issues du point double. Donc :

Les rapports anharmoniques des six tangentes doubles qu'on peut mener à la surface de Kummer, par un de ses points, sont constants.

Il s'agit là des rapports anharmoniques des six droites, prises quatre par quatre.

Ce théorème est analogue à celui qui donne géométriquement l'invariant absolu d'une cubique plane; ici nous avons trois rapports anharmoniques, dépendant des trois périodes a, b, c de nos fonctions Θ.

On peut vérifier la proposition précédente d'une manière élémentaire dans un cas particulier. Menons, en effet, par un point singulier, O, de la surface de Kummer les plans qui touchent le cône, H, des tangentes en ce point, et considérons les sections de la surface par ces plans. Les six tangentes doubles qu'on peut mener de O à l'une d'elles sont évidemment les intersections du plan de la courbe avec les six plans singuliers qui passent par O, plans qui touchent le cône H. Les rapports anharmoniques des six tangentes doubles sont donc ceux des six droites suivant lesquelles un plan mobile, tangent à un cône de second ordre, coupe six plans fixes tangents à ce cône. D'après un théorème bien connu, ces rapports anharmoniques sont constants.

Nous avons ainsi une expression géométrique des modules des sections de la surface par ses plans tangents; on verrait, par voie de réciprocité que *ces modules sont aussi égaux aux rapports anharmoniques de six points singuliers situés sur une même conique.*

61. *Remarque.* — Soit $\Theta_m(u, v)$ une fonction normale d'ordre m; on voit, comme plus haut, que les courbes, d'ordre $4m$,

$$\Theta_m(u-\lambda, v-\mu) = 0$$

ont m^2 points doubles, et que deux d'entre elles se correspondent point par point; nous reviendrons plus tard sur ces courbes remarquables.

62. Reprenons la section de la surface de Kummer par un plan tangent correspondant à l'équation

$$(1) \qquad \vartheta(u-\lambda, v-\mu) = 0.$$

Puisque, à un point de cette courbe, on peut faire correspondre un seul système de valeurs de u, v, à des périodes près, les différentielles *du et dv seront*, le long de la courbe, des différentielles abéliennes; comme elles ne deviennent pas infinies, ce seront *des différentielles abéliennes de première espèce*. Par suite, en chaque point de la courbe, les arguments hyperelliptiques u et v seront égaux à deux intégrales de première espèce, appartenant à cette courbe; on aura ainsi

$$(3) \qquad \begin{cases} u = g(t) + \lambda + \alpha, \\ v = g_1(t) + \mu + \beta, \end{cases}$$

α et β étant deux constantes, $g(t)$ et $g_1(t)$ deux intégrales de première espèce, exprimées en fonction d'une variable quelconque, t; cette variable ne jouera d'ailleurs aucun rôle dans ce qui suit, nous ne l'introduisons que pour rappeler que les intégrales $g(t)$ et $g_1(t)$ ont une même limite supérieure [1].

Pour limite inférieure de ces intégrales, ou mieux pour leur point de départ, nous choisirons le point $u = \lambda$, $v = \mu$, qui vérifie bien la relation $\vartheta(u-\lambda, v-\mu) = 0$, et dont nous verrons plus bas la signification géométrique. Il résulte de ce choix que *α et β sont nuls*, puisque, en faisant $gt = g_1 t = 0$, on doit trouver $u = \lambda$ et $v = \mu$.

En remplaçant u et v par leurs valeurs dans l'équation (1) de la courbe, on a

$$(4) \qquad \vartheta(gt, g_1 t) = 0,$$

---

[1] Dans ce qui suit, nous écrirons gt, $g_1 t$, en supprimant la parenthèse.

équation qui a lieu pour toute valeur de t. On reconnaît là un théorème fondamental de la théorie des fonctions hyperelliptiques du genre 2, qui se trouve établi ici par voie géométrique.

Cela posé, observons que l'équation $\Theta(u-\lambda, v-\mu)=0$ ne change pas si l'on y remplace u et v par $2\lambda-u$, $2\mu-v$: le premier membre ne fait, en effet, que changer de signe. Il en résulte que, si le point u, v est sur la courbe $\Theta(u-\lambda, v-\mu)=0$, le point $2\lambda-u$, $2\mu-v$ y est également : ces deux points sont évidemment *en involution*, c'est-à-dire que, si l'un est donné, le second s'en déduit sans ambiguïté par une détermination géométrique, et que la même construction, appliquée au second, fait retomber sur le premier. Or, sur une courbe générale du quatrième ordre à un point double, il n'y a d'autre involution que celle que constituent les couples de points situés sur une sécante issue du point double; donc *les points u, v et $2\lambda-u$, $2\mu-v$ sont sur une même sécante issue du point double* de la courbe (1). En particulier, on obtiendra *les points de contact des tangentes* menées par le point double, en écrivant

$$u \equiv 2\lambda - u, \qquad v \equiv 2\mu - v \qquad \text{(mod périodes)}$$

c'est-à-dire

$$u = \lambda + \frac{\mathfrak{P}}{2}, \qquad v = \mu + \frac{\mathfrak{P}_1}{2};$$

$\frac{\mathfrak{P}}{2}$ et $\frac{\mathfrak{P}_1}{2}$ étant deux demi-périodes correspondantes. Mais pour que le point u, v, ainsi défini, soit sur la courbe (1), il faut que $\Theta(u-\lambda, v-\mu)$ soit nul, c'est-à-dire

$$\Theta\left(\frac{\mathfrak{P}}{2}, \frac{\mathfrak{P}_1}{2}\right) = 0.$$

On a donc pour $\frac{\mathfrak{P}}{2}$ et $\frac{\mathfrak{P}_1}{2}$ les six systèmes de valeurs écrits plus haut (n° 59).

En particulier, au système de valeurs $(0, 0)$ correspond le point $u=\lambda$, $v=\mu$: ce point, que nous avons rencontré tout à l'heure et pris pour point initial des intégrales gt et $g_1 t$, est donc un des points de contact des tangentes menées à la courbe (1) par son point double.

63. *Remarque.* — Les deux courbes $\Im(u-\lambda, v-\mu)=0$ et $\Im(u'-\lambda', v'-\mu')=0$ se correspondent point par point, selon les relations (2); si donc on désigne par $g't$ et $g'_1 t$ les intégrales de première espèce qui correspondent à u' et v' sur la deuxième courbe, et qui ont pour point initial le point λ', μ', on aura, en vertu de (2) et (3) :

$$gt = g't \qquad \text{et} \qquad g_1 t = g'_1 t.$$

En d'autres termes, on pourra supposer, sans nuire à la généralité, que les intégrales gt et $g_1 t$ sont prises le long d'une courbe *déterminée* $\Im(u-\lambda_0, v-\mu_0)=0$, à partir du point λ_0, μ_0 : c'est ce que nous admettrons dans ce qui suit :

64. L'équation générale qui correspond aux sections de la surface par les plans tangents en un point singulier, $\frac{\mathfrak{P}}{2}$, $\frac{\mathfrak{P}_1}{2}$, est, d'après ce qui précède,

$$(5) \qquad \Im\left(u + g\alpha + \frac{\mathfrak{P}}{2}, v + g_1\alpha + \frac{\mathfrak{P}_1}{2}\right) = 0,$$

α étant arbitraire, et $\frac{\mathfrak{P}}{2}$, $\frac{\mathfrak{P}_1}{2}$ désignant deux demi-périodes correspondantes.

65. Nous renverrons, pour les résultats connus qu'on pourrait déduire de ces relations analytiques, aux Mémoires de MM. Klein et Rohn [1], et nous aborderons un sujet de recherches différent en étudiant l'intersection d'un plan tangent quelconque avec certaines courbes algébriques tracées sur la surface; dans cette étude nous ferons usage d'une proposition de M. Poincaré, qui revient au théorème d'Abel, et qu'on peut énoncer ainsi [2] :

Soient $\Theta_m(u, v)$ et $\Theta_n(u, v)$ deux fonctions thêta, normales, de ca-

---

[1] Klein, *Math. Annalen*, t. XXVII, p. 106; Rohn, *Math. Annalen*, t. XV, p. 315.

[2] *American Journal*, t. VIII.

ractéristique nulle; les deux équations

$$\Theta_m(u-\lambda, v-\mu)=0, \qquad \Theta_n(u-\lambda', v-\mu')=0$$

ont $2mn$ *solutions communes,* $u, v, u_2, v_2, \ldots,$ *entre lesquelles existent les relations*

$$u_1+u_2+\ldots=mn(\lambda+\lambda'), \qquad v_1+v_2+\ldots=mn(\mu+\mu').$$

66. Cela posé, reprenons la courbe, que nous désignerons par C_4,

$$\mathfrak{F}(u-\lambda, v-\mu)=0.$$

On sait, *par le théorème d'Abel,* que les sommes des intégrales gt et g_1t, qui correspondent aux points d'intersection de cette courbe et d'une courbe algébrique d'ordre m, sont constantes.

Inversement, si les sommes des intégrales gt et g_1t qui correspondent à $4m$ points de la courbe C_4 ont les valeurs constantes précédentes, ces $4m$ points ne sont pas généralement sur une courbe d'ordre m, mais sont sur une courbe d'ordre $m+1$, passant en outre par le point double et par deux points quelconques de C_4, situés sur une même sécante issue de ce point [1].

Pour simplifier le langage, nous dirons que cette courbe d'ordre $m+1$ *adjointe* (c'est-à-dire passant par le point double) passe en outre par un couple quelconque de *points conjugués.*

Cherchons maintenant l'expression des sommes constantes d'intégrales qui correspondent aux points d'intersection de C_4 avec une courbe algébrique d'ordre m.

Si la courbe d'ordre m est une droite, les deux sommes s'évaluent aisément. En effet, d'après la proposition de M. Poincaré, les sommes des quatre valeurs de u et de v qui vérifient les équations

$$\mathfrak{F}(u-\lambda, v-\mu)=0, \qquad \Theta(u, v)=0,$$

---

[1] Voir, par exemple, notre Mémoire *Sur l'application des fonctions fuchsiennes à la Géométrie,* tome II de ce journal, 4e série, p. 260 et suiv.

où Θ est une fonction normale du second ordre, de caractéristique nulle, sont :

$$\sum_1^4 u_i = 2\lambda, \qquad \sum_1^4 v_i = 2\mu.$$

Le long de la courbe C_1, on a

$$u = gt + \lambda, \qquad v = g_1 t + \mu,$$

il vient donc

$$\sum_1^4 gt = -2\lambda, \qquad \sum_1^4 g_1 t = -2\mu,$$

les deux sommes s'étendant aux quatre points communs à C_1 et à la courbe *plane* $\Theta(u, v) = 0$.

Ainsi, pour une droite, les sommes d'intégrales g et g_1 ont les valeurs constantes -2λ et -2μ; il en résulte que, pour une courbe d'ordre m, ces sommes ont les valeurs $-2\lambda m$ et $-2\mu m$, puisque la courbe d'ordre m peut, en particulier, se décomposer en m droites.

On déduit de là des conséquences intéressantes.

67. I. Soit toujours $\Theta(u, v)$ une fonction normale, d'ordre deux, à caractéristique nulle, les deux équations

$$\Theta(u, v) = 0, \qquad \vartheta(u - \lambda, v - \mu) = 0$$

ont quatre solutions. Or la dernière donne

$$u = gt + \lambda, \qquad v = g_1 t + \mu.$$

Portant ces valeurs dans la première, celle-ci devient

$$\Theta(gt + \lambda, g_1 t + \mu) = 0; \tag{6}$$

elle est, d'après ce qui précède, vérifiée pour quatre systèmes de valeurs de gt et $g_1 t$, tels que l'on ait

$$\sum gt = -2\lambda, \qquad \sum g_1 t = -2\mu$$

Ainsi, si nous désignons par t_1, t_2, t_3, t_4 des constantes quelconques, l'équation

$$\Theta[gt - \tfrac{1}{2}(gt_1 + gt_2 + gt_3 + gt_4),\ g_1 t - \tfrac{1}{2}(g_1 t_1 + \ldots + g_1 t_4)] = 0$$

sera vérifiée pour quatre systèmes de valeurs de gt et $g_1 t$, tels qu'on ait

$$\sum gt = gt_1 + gt_2 + gt_3 + gt_4,$$

$$\sum g_1 t = g_1 t_1 + g_1 t_2 + g_1 t_3 + g_1 t_4.$$

Je dis que, si deux des solutions de l'équation considérée sont gt_1, $g_1 t_1$ et gt_2, $g_1 t_2$, les deux dernières seront gt_3, $g_1 t_3$ et gt_4, $g_1 t_4$.

On a, en effet, en désignant par $g\sigma$, $g_1\sigma$ et $g\tau$, $g_1\tau$ les deux dernières solutions

$$g\sigma + g\tau = gt_3 + gt_4,$$
$$g_1\sigma + g_1\tau = g_1 t_3 + g_1 t_4,$$

et, d'après la théorie générale de l'inversion, les deux équations précédentes n'ont pas d'autres solutions que

$$\begin{matrix} g\sigma = gt_i, & g\tau = gt_j, \\ g_1\sigma = g_1 t_i, & g_1\tau = g_1 t_j, \end{matrix} \qquad (i, j = 3, 4 \text{ et } i \gtrless j),$$

ce qui est précisément la proposition à établir.

En d'autres termes, si l'équation $\Theta(u, v) = 0$ est satisfaite pour deux des quatre systèmes de valeurs de u et v inscrits au Tableau suivant, elle sera également satisfaite pour les deux autres

$$\begin{matrix} u = \tfrac{1}{2}(gt_1 - gt_2 - gt_3 - gt_4), & v = \tfrac{1}{2}(g_1 t_1 - g_1 t_2 - g_1 t_3 - g_1 t_4), \\ u = \tfrac{1}{2}(-gt_1 + gt_2 - gt_3 - gt_4), & v = \tfrac{1}{2}(-g_1 t_1 + g_1 t_2 - g_1 t_3 - g_1 t_4), \\ u = \tfrac{1}{2}(-gt_1 - gt_2 + gt_3 - gt_4), & v = \tfrac{1}{2}(-g_1 t_1 - g_1 t_2 + g_1 t_3 - g_1 t_4), \\ u = \tfrac{1}{2}(-gt_1 - gt_2 - gt_3 + gt_4), & v = \tfrac{1}{2}(-g_1 t_1 - g_1 t_2 - g_1 t_3 + g_1 t_4). \end{matrix}$$

Géométriquement, en se rappelant qu'il y a quatre fonctions $\Theta(u, v)$ normales, d'ordre deux, à caractéristique nulle, linéairement indé-

pendantes, et que ces quatre fonctions sont proportionnelles aux coordonnées d'un point de la surface de Kummer, on peut dire que tout plan qui passe par deux points (u, v) du Tableau passe par les deux autres. En d'autres termes, le Tableau donne les arguments de quatre points de la surface de Kummer situés sur une droite, et sur une droite quelconque, puisqu'il y a quatre paramètres arbitraires t_1, t_2, t_3, t_4.

Il va sans dire qu'on peut, dans ce Tableau, changer simultanément les signes des arguments u, v d'un quelconque des quatre points.

Plus simplement, on peut dire que les arguments de quatre points en ligne droite sont donnés par les formules

$$u = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_1 g t_1 + \varepsilon_2 g t_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 g t_3 + g t_4),$$
$$v = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_1 g_1 t_1 + \varepsilon_2 g_1 t_2 - \varepsilon_1 \varepsilon_2 g_1 t_3 + g_1 t_4),$$

où ε_1 et ε_2 peuvent prendre les valeurs ± 1.

Cette formule importante est due à M. Klein, qui l'a démontrée sous une autre forme et par une voie différente; nous en ferons plus loin quelques applications.

68. II. Considérons maintenant une fonction Θ, d'ordre $2m$, normale, impaire, à caractéristique nulle; soit $\Theta_{2m}(u, v)$.

Les zéros communs aux fonctions $\Theta_{2m}(u, v)$ et $\mathfrak{F}(u - \lambda, v - \mu)$, au nombre de $4m$, vérifient les relations

$$\sum u = 2m\lambda, \qquad \sum v = 2m\mu;$$

le long de la courbe C_1, c'est-à-dire $\mathfrak{F}(u - \lambda, v - \mu) = 0$, on a

$$u = gt + \lambda, \qquad v = g_1 t + \mu;$$

d'où

$$\sum gt = -2m\lambda, \qquad \sum g_1 t = -2m\mu,$$

les sommes s'étendant aux $4m$ points de la courbe C_1 situés sur la courbe $\Theta_{2m}(u, v) = 0$. Ces deux dernières relations montrent (n° **66**) que les $4m$ points précédents sont sur une courbe d'ordre $m + 1$, ad-

jointe à C_4, qui passe en outre par un couple, qu'on peut choisir arbitrairement, de points conjugués.

On peut ajouter que les $4m$ points ne sont jamais sur une courbe d'ordre m, si aucun d'eux ne coïncide avec le point double de C_4.

Nous savons, en effet (n° **30**), puisque la courbe $\Theta_{2m}(u, v) = 0$ appartient à la *famille singulière* de courbes d'ordre $4m$, qu'elle est sur une surface d'ordre $m + 2$ passant par quatre coniques d'un groupe de Rosenhain. Par suite, les $4m$ points où elle coupe le plan de la courbe C_4, c'est-à-dire la courbe C_4 elle-même, sont sur une courbe d'ordre $m + 2$, passant par les points de contact de quatre tangentes doubles de C_4; si donc ces $4m$ points étaient sur une courbe d'ordre m, les huit points de contact des quatre tangentes seraient sur une conique, d'après une propriété générale bien connue des courbes algébriques ([1]).

Or il est aisé d'établir que les huit points d'intersection d'un plan avec quatre coniques singulières d'un groupe de Rosenhain ne peuvent jamais être sur une conique, C. Si cela était, en effet, la surface du second ordre menée par cette conique et les quatre sommets du tétraèdre de Rosenhain considéré couperait chacune des quatre coniques singulières en cinq points, dont deux sur la conique C et trois en trois sommets du tétraèdre : quatre coniques d'un groupe de Rosenhain seraient ainsi sur une même quadrique, ce qui est impossible (n° **25**).

Nous avons ainsi démontré que :

Les $4m$ points où une courbe algébrique d'ordre $4m$, tracée sur la surface de Kummer et appartenant à la famille singulière, est coupée par un plan tangent quelconque de la surface, sont situés, avec le point de contact de ce plan, sur une infinité de courbes planes d'ordre $m + 1$.

Chacune de ces courbes d'ordre $m + 1$ coupe en outre la section de la surface par le plan tangent considéré en deux points, qui sont sur une même sécante issue du point de contact.

([1]) Il ne peut y avoir d'exception que si un ou plusieurs des $4m$ points coïncident avec le point double de C_4.

Le plan tangent considéré peut avoir son point de contact sur la courbe d'ordre $4m$; on voit alors sans difficulté, soit directement, soit en partant des résultats précédents, que :

Le plan tangent à la surface de Kummer en un point d'une courbe d'ordre $4m$, de la famille singulière, tracée sur cette surface, coupe en outre la courbe en $4m - 2$ points, qui sont situés, avec le point de contact du plan tangent, sur une courbe d'ordre m.

Ces propositions s'appliquent en particulier à la courbe d'ordre $4m$ formée par l'ensemble de deux courbes d'ordre $2m$, appartenant respectivement à deux familles associées (n^{os} **28** et **29**); car le produit des Θ qui correspondent à ces deux courbes est une fonction normale, impaire, de caractéristique nulle.

CHAPITRE VII

Applications diverses.

69. Nous réunirons dans ce Chapitre quelques applications des formules des paragraphes précédents et quelques compléments de nos théories générales; nous commencerons par l'étude *des tétraèdres*, en nombre trois fois infini, *inscrits par leurs sommets et circonscrits par leurs arêtes à la surface de Kummer;* nous montrerons qu'il n'existe pas d'autres figures de cette nature que celles rencontrées au n° **50**, et nous trouverons l'expression analytique de leurs éléments.

D'après les formules du n° **67**, il est aisé de voir que la condition nécessaire et suffisante pour que la droite joignant deux points u_1, v_1; u_2, v_2 de la surface de Kummer touche cette surface en un troisième point, est exprimée par les formules

$$u_1 + \varepsilon u_2 = 2g\rho, \qquad v_1 + \varepsilon v_2 = 2g_1\rho,$$

ε désignant ± 1 et ρ étant une constante quelconque.

Soient u_1, v_1; u_2, v_2; u_3, v_3; u_4, v_4 les sommets d'un tétraèdre inscrit à la surface de Kummer; écrivons que les six arêtes touchent la surface. On aura d'abord, puisque les signes de u_i et v_i peuvent être changés simultanément,

$$(1)\quad \begin{cases} u_1 - u_2 = 2g\rho, & u_1 - u_3 = 2g\sigma, & u_1 - u_4 = 2g\tau, \\ v_1 - v_2 = 2g_1\rho, & v_1 - v_3 = 2g_1\sigma, & v_1 - v_4 = 2g_1\tau. \end{cases}$$

Les conditions de contact des trois arêtes qui ne partent pas du point u_1, v_1 seront

$$(2)\quad \begin{cases} u_2 + \varepsilon u_3 = 2g\omega, & u_2 + \eta u_4 = 2g\varpi, & u_3 + \zeta u_4 = 2g\upsilon, \\ v_2 + \varepsilon v_3 = 2g_1\omega, & v_2 + \eta v_4 = 2g_1\varpi, & v_3 + \zeta v_4 = 2g_1\upsilon, \end{cases}$$

$\rho, \sigma, \tau, \omega, \varpi, \upsilon$ étant des constantes quelconques; ε, η, ζ désignant ± 1.

Supposons d'abord ε, η, ζ égaux à -1. Il vient alors

$$2g\omega = 2(g\sigma - g\rho), \quad 2g\varpi = 2(g\tau - g\rho), \quad 2g\upsilon = 2(g\tau - g\sigma),$$
$$2g_1\omega = 2(g_1\sigma - g_1\rho). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

d'où, en vertu de la relation $\mathfrak{F}(gl, g_1 l) = 0$,

$$\mathfrak{F}\left(g\sigma - g\rho + \frac{\mathfrak{P}}{2},\ g_1\sigma - g_1\rho + \frac{\mathfrak{P}_1}{2}\right),$$
$$\mathfrak{F}\left(g\tau - g\rho + \frac{\mathfrak{P}'}{2},\ g_1\tau - g_1\rho + \frac{\mathfrak{P}'_1}{2}\right),$$
$$\mathfrak{F}\left(g\tau - g\sigma + \frac{\mathfrak{P}''}{2},\ g_1\tau - g_1\sigma + \frac{\mathfrak{P}''_1}{2}\right),$$

$\frac{\mathfrak{P}}{2}, \frac{\mathfrak{P}_1}{2}; \ldots$ étant des demi-périodes simultanées.

Ces trois relations, évidemment distinctes, donnent les valeurs de $g\rho$, $g_1\rho$; $g\sigma$, $g_1\sigma$; $g\tau$, $g_1\tau$ et, par suite, un nombre limité de solutions pour le problème quand le sommet u_1, v_1 est connu; les tétraèdres ainsi trouvés sont en nombre deux fois infini seulement.

Un raisonnement tout semblable montre que, si ε, η, ζ ne sont pas

tous les trois égaux à $+1$, les équations (1) et (2) déterminent u_2, v_2; u_3, v_3; u_4, v_4 en fonction de u_1, v_1; il n'y a donc encore qu'un nombre doublement infini de solutions répondant à cette hypothèse.

Reste enfin le cas où $\varepsilon = \eta = \zeta = 1$.

Des deux premiers couples d'équations (1) et du premier couple (2) on tire, en désignant par $\frac{\mathfrak{P}}{2}, \frac{\mathfrak{P}_1}{2}$ deux demi-périodes simultanées.

$$u_3 = g\omega - g\sigma + g\rho + \frac{\mathfrak{P}}{2}, \qquad v_3 = g_1\omega - g_1\sigma + g_1\rho + \frac{\mathfrak{P}_1}{2},$$

$$u_2 = g\sigma + g\omega - g\rho + \frac{\mathfrak{P}}{2}, \qquad v_2 = g_1\sigma + g_1\omega - g_1\rho + \frac{\mathfrak{P}_1}{2},$$

$$u_1 = g\rho + g\sigma + g\omega + \frac{\mathfrak{P}}{2}, \qquad v_1 = g_1\rho + g_1\sigma + g_1\omega + \frac{\mathfrak{P}_1}{2}.$$

Posons

$$u_4 = g\rho + g\sigma - g\omega + \frac{\mathfrak{P}}{2} + \mathrm{U},$$

$$v_4 = g_1\rho + g_1\sigma - g_1\omega + \frac{\mathfrak{P}_1}{2} + \mathrm{V},$$

et portons ces valeurs dans les deux dernières relations (1) et les quatre dernières relations (2), il vient

$$2g\omega - \mathrm{U} = 2g\tau, \qquad 2g\sigma + \mathrm{U} = 2g\varpi, \qquad 2g\rho + \mathrm{U} = 2g\upsilon,$$

$$2g_1\omega - \mathrm{V} = 2g_1\tau, \qquad 2g_1\sigma + \mathrm{V} = 2g_1\varpi, \qquad 2g_1\rho + \mathrm{V} = 2g_1\upsilon.$$

Éliminant τ, ϖ, υ entre ces équations, à l'aide de la relation $\mathfrak{F}(gt, g_1t)$, on a

$$\mathfrak{F}\left(g\omega - \frac{\mathrm{U}}{2} + \frac{\mathfrak{P}'}{2}, g_1\omega - \frac{\mathrm{V}}{2} + \frac{\mathfrak{P}'_1}{2}\right) = 0,$$

$$\mathfrak{F}\left(g\sigma + \frac{\mathrm{U}}{2} + \frac{\mathfrak{P}''}{2}, g_1\sigma + \frac{\mathrm{V}}{2} + \frac{\mathfrak{P}''_1}{2}\right) = 0,$$

$$\mathfrak{F}\left(g\rho + \frac{\mathrm{U}}{2} + \frac{\mathfrak{P}'''}{2}, g_1\rho + \frac{\mathrm{V}}{2} + \frac{\mathfrak{P}'''_1}{2}\right) = 0.$$

Si nous posons pour un instant $\frac{\mathrm{U}}{2} = u$, $\frac{\mathrm{V}}{2} = v$, les trois équations

qui précèdent représentent (n° **64**) les sections de la surface de Kummer par des plans tangents, dont les points de contact sont respectivement les trois points singuliers $\frac{\mathfrak{P}'}{2}, \frac{\mathfrak{P}'_1}{2}; \frac{\mathfrak{P}''}{2}, \frac{\mathfrak{P}''_1}{2}; \frac{\mathfrak{P}'''}{2}, \frac{\mathfrak{P}'''_1}{2}$, et elles expriment que ces trois plans tangents se coupent en un même point u, v de la surface.

Or, pour que le problème ait une infinité triple de solutions, il faut que ω, σ, ρ soient *arbitraires*, c'est-à-dire que trois plans tangents *arbitraires*, dont les points de contact sont respectivement trois points singuliers, distincts ou non, de la surface de Kummer, se coupent en un point de cette surface : cela ne peut évidemment se produire que si les trois points singuliers coïncident; les trois plans sont alors tangents à la surface en un même point singulier, et se coupent en ce point.

D'après cela, nous devons supposer

$$\frac{\mathfrak{P}'}{2} = \frac{\mathfrak{P}''}{2} = \frac{\mathfrak{P}'''}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\mathfrak{P}'_1}{2} = \frac{\mathfrak{P}''_1}{2} = \frac{\mathfrak{P}'''_1}{2};$$

et les trois équations précédentes seront satisfaites, quels que soient ω, ρ, σ, par

$$\frac{U}{2} = \frac{\mathfrak{P}'}{2}, \quad \frac{V}{2} = \frac{\mathfrak{P}'_1}{2}.$$

Les quantités U et V sont donc nulles, à des périodes près, et les sommets des tétraèdres cherchés ont pour coordonnées hyperelliptiques

$$\begin{aligned}
u_1 &= g\rho + g\sigma + g\omega + \frac{\mathfrak{P}}{2}, & v_1 &= g_1\rho + g_1\sigma + g_1\omega + \frac{\mathfrak{P}_1}{2},\\
u_2 &= -g\rho + g\sigma + g\omega + \frac{\mathfrak{P}}{2}, & v_2 &= -g_1\rho + g_1\sigma + g_1\omega + \frac{\mathfrak{P}_1}{2},\\
u_3 &= g\rho - g\sigma + g\omega + \frac{\mathfrak{P}}{2}, & v_3 &= g_1\rho - g_1\sigma + g_1\omega + \frac{\mathfrak{P}_1}{2},\\
u_4 &= g\rho + g\sigma - g\omega + \frac{\mathfrak{P}}{2}, & v_4 &= g_1\rho + g_1\sigma - g_1\omega + \frac{\mathfrak{P}_1}{2}.
\end{aligned}$$

D'ailleurs les demi-périodes simultanées $\frac{\mathfrak{P}}{2}, \frac{\mathfrak{P}_1}{2}$ peuvent prendre

seize systèmes de valeurs; *on trouve ainsi seize familles de tétraèdres inscrits par leurs sommets et circonscrits par leurs arêtes* à la surface de Kummer, chaque famille dépendant de *trois paramètres arbitraires*. Il n'y a pas d'autre famille analogue dépendant de trois paramètres, comme le montre l'analyse précédente; par suite, les seize familles qu'on vient de trouver doivent se confondre avec les seize familles obtenues par voie géométrique au n° **50**.

70. On peut vérifier ce résultat d'une autre manière.

Soient a_1, a_2, a_3, a_4 les sommets $(u_1, v_1), \ldots, (u_4, v_4)$ d'un des tétraèdres trouvés en dernier lieu; a_{ij} le point de contact de la droite $a_i a_j$ avec la surface de Kummer; pour démontrer que ce tétraèdre est un de ceux rencontrés au n° **50**, il suffit d'établir que les plans tangents à la surface aux six points a_{ij} se coupent deux à deux suivant les trois côtés d'un triangle pqr, inscrit dans une des seize coniques singulières.

Or, considérons la section de la surface par un plan tangent, $\vartheta(u-\lambda, v-\mu) = 0$; écrivons que ce plan passe par les points a_1 et a_2, il vient

$$\vartheta\left(g\rho + g\sigma + g\omega + \frac{\varphi}{2} - \lambda,\quad g_1\rho + g_1\sigma + g_1\omega + \frac{\varphi_1}{2} - \mu\right) = 0,$$

$$\vartheta\left(-g\rho + g\sigma + g\omega + \frac{\varphi}{2} - \lambda,\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right) = 0.$$

Ces deux équations, d'après les formules de M. Poincaré, ont deux solutions communes en λ, μ, et la somme des deux valeurs de λ est $2g\sigma + 2g\omega$, celle des deux valeurs de μ est $2g_1\sigma + 2g_1\omega$. On aperçoit de suite la solution

$$\lambda = \frac{\varphi}{2} + g\sigma + g\omega, \qquad \mu = \frac{\varphi_1}{2} + g_1\sigma + g_1\omega,$$

car, en remplaçant λ et μ par ces valeurs, les premiers membres des deux équations deviennent $\vartheta(g\rho, g_1\rho)$ et $\vartheta(-g\rho, -g_1\rho)$, et sont bien égaux à zéro.

La deuxième solution coïncide, par suite, avec la première, d'après les expressions des sommes des valeurs de λ et de μ.

En d'autres termes, le plan tangent qui coupe la surface suivant la courbe

$$\mathfrak{F}\left(u - g\sigma - g\omega + \frac{\mathfrak{P}}{2}, v - g_1\sigma - g_1\omega + \frac{\mathfrak{P}_1}{2}\right) = 0$$

passe par les points a_1, a_2 et compte pour deux dans le nombre des plans tangents menés par ces deux points : c'est donc nécessairement le plan tangent au point a_{12}, où la droite $a_1 a_2$ touche la surface.

On arrive ainsi à établir que les plans tangents de la surface de Kummer aux points a_{ij} correspondent aux équations

$$\mathfrak{F}\left(u - g\sigma - g\omega + \frac{\mathfrak{P}}{2}, v - g_1\sigma - g_1\omega + \frac{\mathfrak{P}_1}{2}\right) = 0,$$

$$\mathfrak{F}\left(u - g\omega - g\rho + \frac{\mathfrak{P}}{2}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right) = 0,$$

$$\mathfrak{F}\left(u - g\rho - g\sigma + \frac{\mathfrak{P}}{2}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right) = 0,$$

$$\mathfrak{F}\left(u - g\sigma + g\omega + \frac{\mathfrak{P}}{2}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right) = 0,$$

$$\mathfrak{F}\left(u - g\omega + g\rho + \frac{\mathfrak{P}}{2}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right) = 0,$$

$$\mathfrak{F}\left(u - g\rho + g\sigma + \frac{\mathfrak{P}}{2}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\right) = 0.$$

Les quatre plans dans l'équation desquels figurent $g\rho$ et $g_1\rho$ passent par le point $u = g\rho + \frac{\mathfrak{P}}{2}$, $v = g_1\rho + \frac{\mathfrak{P}_1}{2}$, comme on le vérifie immédiatement, soit p ce point. Soient de même q le point $g\sigma + \frac{\mathfrak{P}}{2}$, $g_1\sigma + \frac{\mathfrak{P}_1}{2}$, et r le point $g\omega + \frac{\mathfrak{P}}{2}$, $g_1\omega + \frac{\mathfrak{P}_1}{2}$. Les deux plans dans l'équation desquels figurent à la fois les paramètres ρ et σ passent par la droite pq, et de même pour les couples de paramètres ρ et ω, σ et ω. Si l'on observe maintenant que les points p, q, r sont sur la conique singulière $\mathfrak{F}\left(u + \frac{\mathfrak{P}}{2}, v + \frac{\mathfrak{P}_1}{2}\right) = 0$, on voit bien que la proposition à établir se trouve maintenant démontrée, et qu'on a retrouvé analytiquement les propositions que la Géométrie avait données sur les seize familles de tétraèdres.

71. La configuration remarquable formée par les sommets et les arêtes d'un des précédents tétraèdres peut être aisément généralisée.

Soient, en effet, quatre couples d'intégrales

$$g\rho_1, g_1\rho_1; \quad g\rho_2, g_1\rho_2; \quad g\rho_3, g_1\rho_3; \quad g\rho_4, g_1\rho_4;$$

considérons les huit points définis, sur la surface de Kummer, par les équations

$$\begin{aligned} u_i &= g\rho_1 + \varepsilon_2 g\rho_2 + \varepsilon_3 g\rho_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3 g\rho_4 \\ v_i &= g_1\rho_1 + \varepsilon_2 g_1\rho_2 + \varepsilon_3 g_1\rho_3 + \varepsilon_2\varepsilon_3 g_1\rho_4 \end{aligned} \qquad \varepsilon_2, \varepsilon_3 = \pm 1, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

et

$$\begin{aligned} u_j &= g\rho_1 + \varepsilon_2 g\rho_2 + \varepsilon_3 g\rho_3 - \varepsilon_2\varepsilon_3 g\rho_4 \\ v_j &= g_1\rho_1 + \varepsilon_2 g_1\rho_2 + \varepsilon_3 g_1\rho_3 - \varepsilon_2\varepsilon_3 g_1\rho_4 \end{aligned} \qquad \varepsilon_2, \varepsilon_3 = \pm 1, \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

On pourrait, en outre, ajouter aux u une même demi-période, et aux v la demi-période correspondante.

La droite qui joint un des quatre premiers points à un des quatre derniers touche la surface en un nouveau point : il suffit d'appliquer, pour le vérifier, la règle indiquée plus haut (n° **69**).

Nous obtenons ainsi sur la surface *seize familles de configurations* remarquables, dont chacune dépend de *quatre arbitraires;* une de ces configurations est formée par deux groupes de quatre points de la surface de Kummer, tels que les seize droites joignant les points du premier groupe aux points du second soient des tangentes de la surface. Il est clair que sur une surface quelconque il n'y a qu'un nombre limité de telles configurations.

Plus généralement, si l'on considère les 2^{h-1} points donnés par les relations

$$\begin{aligned} u_i &= g\rho_1 + \varepsilon_2 g\rho_2 + \varepsilon_3 g\rho_3 + \ldots + \varepsilon_h g\rho_h, \\ v_i &= g_1\rho_1 + \varepsilon_2 g_1\rho_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \varepsilon_h g_1\rho_h, \end{aligned}$$

où $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_h$ sont des arbitraires et $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_h$ des quantités égales à $+1$ ou à -1, on voit aisément que les droites qui joignent un d'entre

eux à h autres sont des tangentes de la surface. On obtient ainsi une configuration de 2^{h-1} points de la surface, et de $h \cdot 2^{h-2}$ tangentes de cette surface, tels que par chaque point passent h tangentes et que sur chaque tangente soient situés deux points.

72. Comme seconde application des résultats du précédent Chapitre, nous donnerons quelques propriétés des *courbes du huitième ordre de la famille singulière* tracées sur la surface de Kummer. On désignera par C_8 une quelconque de ces courbes.

Tout d'abord les théorèmes du n° **68**, appliqués à ce cas particulier, deviennent :

Les huit points où une courbe C_8 est coupée par un plan tangent quelconque de la surface de Kummer forment, avec le point de contact du plan, la base d'un faisceau de courbes du troisième ordre.

Chaque courbe de ce faisceau coupe en outre la section de la surface par le plan tangent considéré en deux points, qui sont sur une même sécante issue du point de contact.

Le plan tangent à la surface de Kummer en un point d'une courbe C_8 coupe en outre celle-ci en six points qui sont sur une conique passant par le point de contact du plan.

Nous savons de plus (n° **68**) que les huit points où une courbe C_8 est coupée par un plan tangent de la surface de Kummer ne peuvent être sur une conique que si l'un d'eux coïncide avec le point de contact du plan.

Or les courbes C_8 sont, en général, de genre 5, comme nous l'établirons dans le Chapitre suivant; il en résulte, d'après une formule de M. Zeuthen; qu'elles ont chacune *dix sécantes quadruples*. Soit D une sécante quadruple de C_8; menons par D un plan tangent à la surface de Kummer, désignons par A le point de contact et par p_1, p_2, p_3, p_4 les quatre points, non situés sur D, où ce plan coupe C_8; soient enfin q_1 et q_2 deux points quelconques de la section de la surface par le plan tangent, situés sur une sécante issue de A. D'après une proposition précédente, les quatre points de C_8 situés sur D, les points p_i, le point A et les points q_1, q_2 sont sur une cubique; donc les points

p_i, A, q_1, q_2 sont sur une conique, et, si le point A était distinct des points p_i, ces derniers seraient en ligne droite : les huit points d'intersection de C_8 avec le plan tangent considéré seraient alors sur une conique (décomposée en un système de deux droites), ce qui est impossible.

Il faut donc que le point A soit un des points p_i : en ce cas, deux de ces points sont confondus en A et les deux autres sont sur une sécante issue de ce point.

En d'autres termes :

Chacun des quatre plans tangents menés à la surface de Kummer par une sécante quadruple d'une courbe C_8 *a son point de contact sur cette courbe, qu'il coupe en outre en deux points, situés en ligne droite avec le point de contact.*

Les courbes C_8 dépendent linéairement de cinq paramètres (n° **39**), et se coupent deux à deux en huit points non singuliers (n° **58**) : celles de ces courbes qui passent par quatre points de la surface de Kummer ont donc quatre autres points communs, et, d'après cela, la proposition qui précède peut s'énoncer ainsi :

Les courbes C_8 *qui passent par quatre points de la surface de Kummer situés sur une droite, passent par les quatre points de contact des plans tangents qu'on peut mener à la surface par cette droite.*

73. Parmi les surfaces de Kummer inscrites à la surface primitive le long d'une courbe C_8 (n° **58**), il en est dix qui dégénèrent en surfaces du quatrième ordre, possédant une droite double et huit points doubles.

Pour le démontrer, nous nous appuierons sur cette remarque évidente que, si deux surfaces sont inscrites l'une à l'autre, toute courbe tracée sur la première touche la seconde en tous ses points de rencontre avec elle; il ne peut y avoir exception que si l'un de ces points est un point singulier de l'une ou l'autre des deux surfaces.

Cela posé, soit D une sécante quadruple d'une courbe C_8; un des

plans tangents à la surface de Kummer menés par D touche la surface en un point A, de C_8, et coupe en outre C_8 en deux points, p_1, p_2, en ligne droite avec A (n° **72**). Parmi les surfaces du quatrième ordre inscrites le long de C_8, surfaces qui forment un faisceau ponctuel, il en est une, et une seule, S, qui passe par un cinquième point de D, et qui, par suite, contient cette droite. En vertu de la remarque précédente, les quatre points où D rencontre la surface de Kummer sont des points doubles de S, et la droite D est dès lors une droite double de S. Observons maintenant que la droite Ap_1p_2 (qui coupe D) est sur la surface S, puisqu'elle a cinq points sur celle-ci, et que les points p_1 et p_2 sont, d'après la remarque, des points doubles de S. Le même raisonnement pouvant être reproduit pour les quatre plans tangents menés à la surface de Kummer par la droite D, on voit que la surface S a huit points doubles. Ainsi :

Le long de toute courbe C_8 générale tracée sur la surface de Kummer, on peut inscrire à cette surface dix surfaces du quatrième ordre, ayant une droite double et huit points doubles.

Pour chacune de ces surfaces, la droite double est une des dix sécantes quadruples de la courbe C_8; les huit points doubles, situés sur C_8, sont par couples dans les quatre plans tangents qu'on peut mener par la droite double à la surface de Kummer.

Il serait aisé de voir que, pour certaines courbes C_8 *particulières*, deux des surfaces précédentes peuvent se confondre en une seule surface du quatrième ordre, à deux droites doubles; dans un autre cas, celui où la courbe C_8 a un point double, une des surfaces du quatrième ordre inscrites a deux droites doubles, concourant au point double et tangentes à la surface de Kummer en ce point; enfin, dans un troisième cas, que nous rencontrerons plus loin, où la courbe C_8 a un point triple en un des points singuliers de la surface de Kummer, une des surfaces du quatrième ordre inscrites est *une surface de Steiner*.

74. En dernier lieu, nous énoncerons, relativement aux courbes algébriques tracées sur la surface de Kummer, ces quelques propositions évidentes, auxquelles nous aurons à renvoyer par la suite.

Les courbes d'ordre $4m$, qui sont les intersections complètes de la surface et d'une surface d'ordre m, touchent en $2m$ points chacun des plans singuliers.

Les courbes d'ordre $4m$, de la famille singulière, touchent en $2m - 3$ points les seize plans singuliers.

Les courbes d'ordre $4m$, appartenant à l'une des trente familles associées deux à deux, touchent huit plans singuliers en $2m - 1$ points et les huit autres en $2m - 3$ points.

Les courbes d'ordre $4m + 2$ qui passent par six points singuliers situés dans un même plan touchent ce plan en $2m - 2$ points, et touchent les quinze autres plans singuliers en $2m$ points.

Les courbes d'ordre $4m + 2$ qui passent par les dix points singuliers non situés dans un plan singulier, touchent celui-ci en $2m + 1$ points et touchent les quinze autres en $2m - 1$ points.

CHAPITRE VIII.

Surfaces développables circonscrites à la surface de Kummer.

75. La réciproque d'une surface de Kummer est évidemment une surface de Kummer; aux courbes tracées sur la première correspondent des surfaces développables circonscrites à la seconde, et, par suite, les propositions démontrées sur la classification des courbes d'un degré connu donnent, par dualité, la classification des surfaces développables, d'une classe donnée, circonscrites à la surface de Kummer.

Pour ne pas étendre inutilement ce Mémoire, nous n'énoncerons pas explicitement toutes ces propriétés.

Quand on transforme par réciprocité une surface de Kummer, une courbe C_1 d'ordre $2m$, de cette surface se transforme en une développable de classe $2m$ circonscrite à la surface réciproque suivant une courbe C_2 : pour abréger, nous dirons que *les courbes* C_1 *et* C_2 *sont réciproques.*

Cela posé, nous traiterons les questions suivantes :

Étant donnée sur la surface de Kummer une courbe C_1, *quel est*

le degré de la courbe réciproque, C_2, *et à quelle famille appartient celle-ci?*

Le degré de C_2 est d'ailleurs égal à la classe de la développable circonscrite, le long de la courbe C_1, à la surface de Kummer primitive.

Nous pouvons toujours supposer que la quadrique qui sert à définir la transformation réciproque ait pour équation

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0;$$

soient toujours $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3, \Theta_4$ les quatre fonctions normales, d'ordre 2, à caractéristique nulle, qui sont proportionnelles aux coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 d'un point d'une surface de Kummer, K_1.

Les coordonnées X_1, X_2, X_3, X_4 d'un point de la surface K_2, réciproque de K_1, sont données par les formules

$$\rho X_1 = \begin{vmatrix} \Theta_2 & \Theta_3 & \Theta_4 \\ \frac{\partial\Theta_2}{\partial u} & \frac{\partial\Theta_3}{\partial u} & \frac{\partial\Theta_4}{\partial u} \\ \frac{\partial\Theta_2}{\partial v} & \frac{\partial\Theta_3}{\partial v} & \frac{\partial\Theta_4}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad -\rho X_4 = \begin{vmatrix} \Theta_1 & \Theta_2 & \Theta_3 \\ \frac{\partial\Theta_1}{\partial u} & \frac{\partial\Theta_2}{\partial u} & \frac{\partial\Theta_3}{\partial u} \\ \frac{\partial\Theta_1}{\partial v} & \frac{\partial\Theta_2}{\partial v} & \frac{\partial\Theta_3}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Désignons par $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ les quatre déterminants précédents : chacune des fonctions θ_i est, comme on le voit aisément, une fonction thêta, normale, paire, d'ordre 6, à caractéristique nulle. Elle s'annule pour la demi-période $u = 0$, $v = 0$, ainsi que ses dérivées premières par rapport à u et v, car les fonctions *impaires* $\frac{\partial\Theta_i}{\partial u}$, $\frac{\partial\Theta_i}{\partial v}$ s'annulent pour $u = 0$, $v = 0$. On démontrerait de même que les quinze autres demi-périodes annulent les quatre fonctions θ_i et leurs dérivées premières.

Géométriquement, les courbes, représentées sur la surface K_1 par l'équation

$$\mu_1\theta_1 + \mu_2\theta_2 + \mu_3\theta_3 + \mu_4\theta_4 = 0,$$

$\mu_1, \ldots \mu_4$ étant des constantes, sont, d'après ce qui vient d'être dit,

les intersections de K_1 avec des surfaces du troisième ordre passant par les seize points singuliers : ce résultat était à prévoir, puisque la polaire d'un point quelconque par rapport à K_1 est précisément une surface de cette nature.

Cela posé, soit $\Theta_p(u, v) = 0$ l'équation d'une courbe quelconque C_1 d'ordre $2p$, tracée sur K_1 : Θ_p est une fonction normale, d'ordre p, paire ou impaire. La courbe réciproque C_2 sera représentée, sur la surface K_2, par la même équation; il sera aisé, d'après cela, d'en déterminer le degré et la famille.

76. *Supposons d'abord p pair;* $p = 2m$; trois cas sont à distinguer :

1° Si la courbe C_1, d'ordre $4m$, est l'intersection complète de K_1 et d'une surface d'ordre m, la fonction thêta correspondante $\Theta_{2m}(u, v)$ est paire, d'ordre $2m$, et ne s'annule, en général, pour aucune des seize demi-périodes.

On trouvera le degré de la courbe C_2, c'est-à-dire de la courbe $\Theta_{2m}(u, v) = 0$ sur la surface K_2, en cherchant en combien de points cette courbe coupe le plan $X_i = 0$. Or X_i est proportionnel à une fonction θ_i, paire et d'ordre 6; le nombre des zéros communs aux fonctions Θ_{2m} et θ_i est égal à $2.2m.6 = 24m$, et comme ces zéros sont deux à deux égaux et de signes contraires, *le degré de* C_2 *sera* la moitié de ce nombre, c'est-à-dire $12m$.

Si la courbe C_1 passe par un ou plusieurs points doubles de K_1, ce résultat se modifie. Supposons, par exemple, qu'elle passe par le point singulier $u = 0$, $v = 0$: la fonction *paire* $\Theta_{2m}(u, v)$, s'annulant pour $u = 0$, $v = 0$, aura ses dérivées premières nulles en ce point, et, par suite, parmi les $24m$ solutions communes aux deux équations $\theta_i = 0$, $\Theta_{2m} = 0$ figurera quatre fois la solution $u = 0$, $v = 0$ [1]. Le degré de C_2 sera ainsi $\frac{1}{2}(24m - 4) = 12m - 2$; on voit qu'il s'abaisse de deux unités toutes les fois que C_1 passe par un point singulier de la surface K_1.

---

[1] Cela tient, géométriquement, à ce que les deux courbes $\Theta_{2m}(u, v) = 0$, $\theta_i(u, v) = 0$ ont un point double pour $u = 0$, $v = 0$, sur la surface K_1.

La courbe C_1 (n° **74**), si elle ne passe par aucun point singulier, touche en $2m$ points chacun des seize plans singuliers de K_1; les seize points singuliers de K_2 seront donc, sur C_2, des points multiples d'ordre $2m$; il en résulte que C_2 est (n° **51**) l'intersection complète de la surface K_2 avec une surface algébrique d'ordre $3m$ ayant un point multiple d'ordre m en chacun des seize points singuliers de K_2.

Ce dernier résultat, transformé par réciprocité, donne la proposition suivante :

La développable circonscrite à la surface de Kummer le long d'une courbe d'ordre $4m$, intersection de cette surface avec une surface d'ordre m qui ne passe par aucun point singulier, est de classe $12m$; elle est circonscrite à une surface de classe $3m$, qui touche en m points chacun des seize plans singuliers.

2° Si la courbe C_1 appartient à la famille singulière d'ordre $4m$, on trouve sans difficulté, en appliquant les mêmes méthodes que tout à l'heure, que le degré de C_2 est égal à $\frac{1}{2}[12.2m - 2.16] = 12m - 16$.

En général, la courbe C_1 touche en $2m - 3$ points chacun des seize plans singuliers de K_1 (n° **74**); sur C_2 les seize points singuliers de K_2 sont donc des points multiples d'ordre $2m - 3$: il en résulte (n° **51**) que C_2 appartient, sur K_2, à la famille singulière de courbes d'ordre $4(3m - 4)$.

3° La courbe C_1 peut enfin appartenir à l'une des trente familles de courbes qui passent par huit points singuliers de K_1; on trouve, en ce cas, que l'ordre de C_2 est égal à $\frac{1}{2}[12.2m - 16] = 12m - 8$.

En général, la courbe C_1 touche en $2m - 1$ points huit des plans singuliers de K_1 et touche les huit autres en $2m - 2$ points (n° **74**). Donc, sur C_2, huit des points singuliers de K_2 sont multiples d'ordre $2m - 1$, et les huit autres, multiples d'ordre $2m - 2$; par suite (n° **51**), sur la surface K_2, la courbe C_2 appartient à une des trente familles, deux à deux associées, de courbes d'ordre $12m - 8$.

Les résultats qui précèdent ne sont exacts que si les courbes C_1 considérées n'ont de point multiple (d'ordre supérieur ou égal à 2), en aucun des points singuliers de K_1; il est aisé de calculer l'abaissement

que la présence d'un tel point multiple amènerait dans le degré de C_2; on trouve, par la méthode suivie plus haut, que, pour un point multiple d'ordre $2h$, l'abaissement est égal à $2h$, et pour un multiple d'ordre $2h+3$, égal à $2h+2$.

De plus, on déterminerait aisément, dans chaque cas particulier, à quelle famille appartient C_2 : il suffit, pour cela, de chercher en combien de points C_1 touche chacun des seize plans singuliers de K_1; on connaît ainsi l'ordre de multiplicité des points singuliers de K_2 sur la courbe C_2, d'où l'on déduit (n° **51**) la famille de celle-ci.

77. *Supposons maintenant p impair;* $p = 2m+1$; deux cas sont à distinguer :

1° Si la courbe C_1, d'ordre $4m+2$, passe par six points singuliers dans un même plan, le degré de C_2 est égal à

$$\tfrac{1}{2}[12(2m+1)-2.6]=12m.$$

La courbe C_1, en général, touche (n° **74**) quinze des plans singuliers de K_1 en $2m$ points et le seizième en $2m-2$ points; donc C_2 a un point multiple d'ordre $2m-2$ en un des points singuliers de K_2, et un point d'ordre $2m$ en chacun des quinze autres. La courbe C_2 est donc l'intersection complète de K_2 avec une surface d'ordre $3m$ ayant un point multiple d'ordre $m-1$ en un des points singuliers de K_2 et un point d'ordre m en chacun des quinze autres.

2° Si la courbe C_1 passe par dix points singuliers de K_1, le degré de C_2 est égal à $\frac{1}{2}[12(2m+1)-2.10]=12m-4$; on voit, comme plus haut, qu'elle a, en général, un point multiple d'ordre $2m+1$ en un des points singuliers de K_2 et un point multiple d'ordre $2m-1$ en chacun des quinze autres. La courbe C_2 appartient donc à la famille singulière de courbes d'ordre $12m-4$.

Si la courbe C_1 a un point multiple en un point singulier de K_1, ces résultats cessent d'être exacts, et le degré de C_2 s'abaisse, d'après la loi indiquée au n° **76**.

78. Comme application, on peut observer que la réciproque d'une courbe C_1 de la famille singulière d'ordre 8, n'ayant de point multiple

en aucun point double de la surface de Kummer, est également une courbe d'ordre 8 de la famille singulière; par suite la développable circonscrite le long d'une telle courbe est de classe 8.

Dans le cas où la courbe C_1 a un point triple en un point singulier de K_1, elle ne touche aucun des six plans singuliers passant par ce point et touche les dix autres en un point : la réciproque, C_2, est une courbe du sixième ordre (n° **76**), passant par les dix points singuliers de K_2 non situés dans un même plan singulier.

Inversement, la réciproque d'une telle courbe C_2 du sixième ordre est une courbe C_1, d'ordre 8, de la famille singulière, ayant un point triple en un point singulier.

Or, le long de C_2, on peut inscrire à K_2 une surface du troisième ordre à quatre points doubles (n° **49**): donc, le long de C_1 on pourra inscrire à K_1 une *surface de Steiner*, et, par suite :

Il y a seize familles, chacune trois fois infinie, de surfaces de Steiner inscrites à une surface de Kummer; les courbes de contact des surfaces d'une même famille sont les courbes d'ordre 8, *de la famille singulière, qui ont un point triple en un des seize points singuliers.*

79. Voici quelques propriétés de ces surfaces déduites, par dualité, de celles énoncées au n° **49** :

Les surfaces de Steiner inscrites à la surface de Kummer le long des courbes d'ordre 8 *qui ont un point triple en un même point singulier ont chacune pour droites doubles trois droites passant par ce point et formant un trièdre dont les faces touchent le cône des tangentes de la surface de Kummer au point singulier considéré.*

Inversement, *les trois arêtes d'un trièdre, circonscrit au cône des tangentes d'une surface de Kummer en un point singulier, sont les droites doubles d'une surface de Steiner inscrite à cette surface.*

Deux surfaces de Steiner inscrites, appartenant à une même famille, se touchent en quatre points de la surface de Kummer; ces quatre points, situés dans un même plan, sont les points de contact

avec cette surface d'une même conique, qui est tracée sur les deux surfaces de Steiner considérées.

Observons enfin que les quatre plans singuliers d'une surface de Steiner inscrite, c'est-à-dire les quatre plans qui la touchent chacun suivant une conique, forment un *tétraèdre circonscrit par ses faces et par ses arêtes* à la surface de Kummer. Ces tétraèdres sont les réciproques de ceux du n° **50**, qui sont inscrits par leurs sommets et circonscrits par leurs arêtes; le théorème du n° **51** se transforme ainsi :

Les trois arêtes d'un trièdre circonscrit au cône des tangentes d'une surface de Kummer en un point singulier rencontrent respectivement la surface en deux nouveaux points : les six points ainsi obtenus sont trois à trois sur quatre plans qui touchent la surface de Kummer, et ces quatre plans sont les faces d'un tétraèdre dont les six arêtes touchent également la surface. Les points de contact des six arêtes sont les six points primitifs.

CHAPITRE IX.

Genre des courbes algébriques tracées sur la surface de Kummer. Géométrie sur ces courbes.

80. Nous étudierons, dans ce Chapitre, les courbes tracées sur la surface de Kummer, au point de vue de leur genre et de toutes les propriétés qui se rattachent à la notion de genre; nous arriverons ainsi, dans ce sujet de recherches, à des résultats simples et intéressants, liés d'une manière étroite à notre théorie de la classification des courbes d'un degré donné.

La Géométrie permet d'indiquer immédiatement le genre général des courbes d'un même ordre et d'une même famille, sur la surface de Kummer.

Ces courbes, en effet, sont les intersections de la surface de Kummer, qui est d'ordre 4, avec des surfaces d'un même degré, q, passant

par h coniques singulières ($h = 0, 1, 2, 3, 4$); or, d'après un théorème de M. Nöther, les surfaces d'ordre $q + 4 - 4$, c'est-à-dire d'ordre q qui passent par les h coniques, coupent une des courbes de la famille considérée en $2(p-1)$ points mobiles, p étant le genre général de ces courbes : en d'autres termes, deux courbes de la famille se coupent en $2(p-1)$ points variables. De plus, ces $2(p-1)$ points forment, sur la courbe à laquelle ils appartiennent, un des *groupes spéciaux* qu'on désigne par la notation $\mathcal{G}_{2(p-1)}$, ou plus simplement $\mathcal{G}$, et dont voici la définition générale :

Sur une courbe plane d'ordre m, les groupes $\mathcal{G}_{2(p-1)}$ sont les groupes de $2(p-1)$ points mobiles découpés sur la courbe par les courbes adjointes d'ordre $m-3$; sur une courbe gauche, intersection partielle de deux surfaces d'ordres m et n, les groupes $\mathcal{G}$ sont découpés par les surfaces d'ordre $m+n-4$ adjointes, c'est-à-dire passant par le reste de l'intersection des deux surfaces, et par les points doubles de la courbe gauche, si elle en a. Cette dernière définition implique un théorème, qui est dû à M. Nöther et que nous venons de rappeler tout à l'heure. Dans tous les cas, on peut dire que sur une courbe gauche, les groupes $\mathcal{G}$ sont formés par les points qui correspondent univoquement aux points d'un groupe $\mathcal{G}$ sur une courbe plane de même genre et de mêmes modules, ou encore sont formés par les points où s'annule une même différentielle abélienne de première espèce.

Il résulte des définitions et des raisonnements précédents que l'on obtiendra, sur une courbe algébrique générale de la surface de Kummer, *tous* les groupes $\mathcal{G}$, en coupant cette courbe par les courbes du même ordre et de la même famille; or les groupes $\mathcal{G}$ forment, sur une courbe, un système $p-1$ fois infini, d'après leur définition même sur la courbe plane de genre p : on voit ainsi que $p-1$, pour une courbe de la surface de Kummer, est égal au nombre, diminué de 1, des paramètres dont dépend linéairement l'équation des courbes du même ordre et de la même famille.

Ce résultat peut se vérifier autrement : nous avons vu, en effet, que, si N est le nombre des points mobiles communs à deux courbes du même ordre et de la même famille, le genre général, p, de ces courbes est donné par la relation $N = 2(p-1)$; comme nous savons calculer N, par la formule de M. Poincaré, nous pouvons calculer p, et

nous arrivons ainsi, sans difficulté, à la formule

$$p = 1 + \frac{1}{2}(m^2 - s),$$

$2m$ étant l'ordre de la courbe considérée, supposée sans point multiple, p son genre et $2s$ le nombre des points singuliers de la surface de Kummer par lesquels elle passe.

Ainsi :

Le genre général des courbes d'un même ordre et d'une même famille tracées sur la surface de Kummer est égal au nombre des paramètres dont dépend cette famille.

Deux de ces courbes se coupent en des points mobiles formant sur l'une et sur l'autre un groupe spécial $\mathcal{G}_{2(p-1)}$, *et, sur l'une d'elles, tous les groupes spéciaux* $\mathcal{G}_{2(p-1)}$ *sont découpés par les autres courbes de la famille.*

81. Ces résultats peuvent être établis par une méthode analytique, que nous aurons occasion d'appliquer dans nos recherches ultérieures.

Soit $\Theta(u, v)$ la fonction normale la plus générale, d'ordre m et de caractéristique donnée, paire ou impaire : $\Theta_0(u, v)$ étant une quelconque des fonctions ainsi définies, la courbe $\Theta_0 = 0$ sera, sur la surface de Kummer, d'ordre $2m$; si nous désignons par x, y, z les coordonnées non homogènes d'un quelconque de ses points, toute *différentielle abélienne* appartenant à cette courbe sera de la forme $F(x, y, z)\,dx$, F étant rationnel en x, y, z.

Considérons, maintenant, le long de la courbe $\Theta_0 = 0$, la différentielle

$$\frac{\Theta(u, v)}{\left(\frac{\partial \Theta_0}{\partial v}\right)}\,du,$$

où $\Theta(u, v)$ a la signification qu'on vient d'indiquer. Nous allons prouver que c'est *une différentielle abélienne de première espèce.*

Démontrons d'abord que c'est une différentielle abélienne, c'est-

à-dire qu'en tout point de la courbe $\Theta_0 = 0$, on a

$$\frac{\Theta(u, v)}{\left(\frac{\partial \Theta_0}{\partial v}\right)} du = F(x, y, z)\, dx,$$

ce qui revient à dire que la fonction

$$\varphi(u, v) = \frac{\Theta(u, v)}{\left(\frac{\partial \Theta_0}{\partial v}\right)} \frac{du}{dx}$$

est exprimable, le long de la courbe, en fonction rationnelle des coordonnées.

Or, sur la surface de Kummer et, par suite, le long de la courbe, les coordonnées x, y, z d'un point sont évidemment, d'après le mode de représentation en coordonnées homogènes, des fonctions uniformes, quadruplement périodiques et *paires* des deux paramètres u, v; on a donc

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv,$$

$\frac{\partial x}{\partial u}$ et $\frac{\partial x}{\partial v}$ étant des fonctions quadruplement périodiques *impaires*. D'ailleurs, le long de la courbe $\Theta_0(u, v) = 0$, on a

$$\frac{\partial \Theta_0}{\partial u} du + \frac{\partial \Theta_0}{\partial v} dv = 0.$$

Il vient ainsi, pour l'expression de $\varphi(u, v)$, par élimination de dx, du et dv,

$$\varphi(u, v) = \frac{\Theta(u, v)}{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \Theta_0}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \Theta_0}{\partial u}}.$$

Le long de la courbe $\Theta_0 = 0$, on peut écrire

$$\frac{1}{\varphi(u, v)} = \frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\frac{\partial \Theta_0}{\partial v}\Theta - \frac{\partial \Theta}{\partial v}\Theta_0}{\Theta^2} - \frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{\frac{\partial \Theta_0}{\partial u}\Theta - \frac{\partial \Theta}{\partial u}\Theta_0}{\Theta^2},$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{\varphi(u, v)} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\frac{\Theta_0}{\Theta} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\Theta_0}{\Theta}.$$

Sous cette dernière forme, on voit, puisque $\frac{\Theta_0}{\Theta}$ est évidemment une fonction quadruplement périodique paire, que $\varphi(u, v)$ est aussi une fonction quadruplement périodique, *paire*.

Or il est clair que toute fonction $\varphi(u, v)$ quadruplement périodique et paire peut s'exprimer en fonction rationnelle des coordonnées, x, y, z, du point (u, v) de la surface de Kummer; car, si l'on se donne x, y, z, les paramètres u et v n'ont, abstraction faite des multiples des périodes, que deux systèmes de valeurs de la forme u, v et $-u$, $-v$, auxquels ne correspond qu'une seule valeur de $\varphi(u, v)$.

La fonction $\varphi(u, v)$ étant ainsi une fonction rationnelle de x, y, z, notre différentielle est abélienne.

Reste à établir qu'elle est de première espèce. Or cette différentielle,

$$\frac{\Theta(u, v)}{\left(\frac{\partial \Theta_0}{\partial v}\right)} du,$$

ne peut devenir infinie, puisque $\Theta(u, v)$ est une fonction entière, qu'aux points de la courbe $\Theta_0 = 0$ qui annulent $\frac{\partial \Theta_0}{\partial v}$. Mais la relation

$$\frac{\partial \Theta_0}{\partial u} du + \frac{\partial \Theta_0}{\partial v} dv = 0$$

montre qu'en ces points du s'annule également, et que la différentielle reste finie; l'analogie avec le cas des courbes algébriques planes est évidente.

Il ne peut y avoir d'exception que pour les points de la courbe $\Theta_0 = 0$ qui vérifieraient les relations $\frac{\partial \Theta_0}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial \Theta_0}{\partial v} = 0$, c'est-à-dire pour les points qui seraient *multiples* sur la courbe considérée.

Écartant provisoirement ce cas particulier, nous voyons que pour une courbe $\Theta_0(u, v) = 0$, sans point multiple, les intégrales abé-

liennes

$$(1) \qquad \int \frac{\Theta(u, v)}{\left(\frac{\partial \Theta_0}{\partial u}\right)} du$$

sont de première espèce.

82. Réciproquement, toute intégrale de première espèce, le long de la courbe $\Theta_0 = 0$ est de la forme précédente; en effet, nous savons (n° **80**) que le genre de $\Theta_0 = 0$ est égal au nombre (diminué de une unité) des paramètres qui figurent dans l'équation des courbes du même ordre et de la même famille; si $\varpi + 1$ est ce nombre, on aura $p = \varpi$. Mais les fonctions telles que Θ, linéairement indépendantes, sont en nombre $\varpi + 1$, par définition; si l'on fait abstraction de la fonction Θ_0, les ϖ autres donnent, sous la forme (1), ϖ (ou p) intégrales distinctes de première espèce le long de la courbe $\Theta_0 = 0$. Le nombre des intégrales distinctes de première espèce, sur une courbe de genre p, étant toujours égal à p, on voit qu'on a ainsi obtenu toutes ces intégrales, pour la courbe $\Theta_0 = 0$, sous la forme (1).

Ce résultat aurait pu d'ailleurs s'établir directement par voie exclusivement analytique. Donc :

Les intégrales abeliennes de première espèce, appartenant à une courbe $\Theta_0(u, v) = 0$ de la surface de Kummer, ont pour expression générale

$$\int \frac{\Theta(u, v)}{\left(\frac{\partial \Theta_0}{\partial v}\right)} du,$$

où $\Theta(u, v)$ désigne la fonction thêta normale la plus générale de même ordre et de même caractéristique que la fonction $\Theta_0(u, v)$, paire ou impaire en même temps que celle-ci.

83. *Remarque.* — Si la courbe $\Theta_0 = 0$ a un point double, il est clair que la courbe $\Theta = 0$ doit passer par ce point pour que l'intégrale abélienne correspondante y reste finie; plus généralement, si $\Theta_0 = 0$ a un point multiple d'ordre h, on voit, comme dans le cas des courbes planes, que la courbe $\Theta = 0$ doit avoir, au même point, un point

multiple d'ordre $h - 1$. Les courbes $\Theta = 0$ satisfaisant à cette condition seront dites *adjointes* de la courbe $\Theta_0 = 0$.

On voit également qu'un point double diminue le genre de une unité, un point triple de trois, etc.; il peut y avoir exception si le point multiple est un des points singuliers de la surface de Kummer; mais nous ne discuterons pas ce cas spécial, facile à examiner, et sans intérêt pour nos recherches actuelles.

84. L'étude des intersections d'une courbe générale de la surface de Kummer avec les courbes de la même famille et du même ordre revient, d'après la théorie précédente, à celle des groupes $\mathcal{G}$ sur cette courbe, et réciproquement. Or on connaît, pour une courbe algébrique quelconque, un certain nombre de propriétés générales des groupes $\mathcal{G}$, qui donneront ainsi autant de propriétés correspondantes, sur la surface de Kummer, relativement aux courbes d'une même famille.

Voici deux exemples :

Parmi les courbes d'ordre $n - 3$, adjointes à une courbe plane d'ordre n et de genre p, il en est $2^{p-1}(2^p - 1)$ qui touchent celle-ci en tous leurs points, non singuliers, de rencontre avec elle; il en est $p(p^2 - 1)$ qui ont avec cette courbe un contact d'ordre $p - 1$ en un point. Donc :

Parmi les courbes du même ordre et de la même famille qu'une courbe donnée, de genre p, sans point multiple, sur la surface de Kummer : 1° il en est $2^{p-1}(2^p - 1)$ qui touchent la proposée en tous leurs points (non fixes) de rencontre avec elle; 2° il en est $p(p^2 - 1)$ qui ont avec elle, en un point, un contact de l'ordre le plus élevé possible.

85. Des résultats plus nombreux et plus intéressants dérivent de la considération des *groupes* de points sur les courbes de la surface de Kummer, et en particulier de certains *groupes spéciaux;* mais, avant d'aborder ce sujet de recherches, il est nécessaire de rappeler, dans une courte digression, quelques définitions ou propositions de la théorie générale des courbes algébriques.

Soit C une courbe algébrique plane d'ordre n et de genre p : les courbes d'un degré donné, adjointes à C et passant par un certain nombre de points fixes de cette courbe, la coupent en outre en h points mobiles : les groupes de h points ainsi déterminés sont dits *équivalents* entre eux; les groupes équivalents à un groupe donné forment un *système de groupes*.

Analytiquement, deux groupes $a_1, a_2, \ldots, a_h$ et $b_1, b_2, \ldots, b_h$ sont équivalents, lorsque l'on a, en désignant par $\int g\,dx$ une intégrale quelconque de première espèce, appartenant à C,

$$\int_{a_1}^{b_1} g\,dx + \int_{a_2}^{b_2} g\,dx + \ldots + \int_{a_h}^{b_h} g\,dx = 0 \quad (^1).$$

Inversement, si une telle relation existe pour chacune des p intégrales de première espèce, les groupes $a_1, a_2, \ldots$ et $b_1, b_2, \ldots$ sont équivalents. C'est le théorème d'Abel et sa réciproque.

Dans un système de groupes, on distingue deux éléments :

1° Le nombre h des points d'un groupe du système;

2° La multiplicité, r, du système, c'est-à-dire le nombre de points d'un groupe qu'on peut se donner arbitrairement.

En général, d'après le théorème d'Abel, p points d'un groupe d'un système donné sont déterminés par les $h - p$ autres; on a donc

$$r = h - p,$$

mais il peut se faire qu'on ait

$$r = h - p + \rho,$$

ρ étant positif; on dit alors que le système correspondant à ces valeurs de h et r est un *système spécial, d'indice* ρ. Les groupes d'un système spécial sont dits *groupes spéciaux*.

---

(1) Le second membre de cette relation n'est nul qu'à des multiples près des $2p$ périodes de l'intégrale $\int g\,dx$.

D'après cela, tout système de groupes comprenant moins de $p+1$ points est spécial.

Les groupes $\mathcal{G}_{2(p-1)}$ forment un système spécial, d'indice 1.

La théorie des systèmes spéciaux est dominée par le théorème suivant, dit *de Riemann-Roch :*

Par les points d'un groupe appartenant à un système spécial de multiplicité r et d'indice ρ, on peut faire passer un nombre $\rho - 1$ fois infini de courbes adjointes d'ordre $n-3$: ces courbes déterminent, par leurs points mobiles d'intersection avec C, *un nouveau système de multiplicité $\rho - 1$, qui est un système spécial d'indice $r+1$.*

Les deux systèmes seront dits *complémentaires.*

Une courbe plane d'ordre n est coupée, par les droites de son plan, suivant des groupes de n points, équivalents entre eux : il résulte du théorème de Riemann-Roch que, si le système déterminé par ces groupes est un système spécial, d'indice ρ, la courbe considérée admet une famille linéaire, $\rho - 1$ fois infinie, de courbes adjointes d'ordre $n-4$, et réciproquement. Les courbes jouissant de cette propriété sont dites *spéciales.*

De même, si les groupes de points déterminés sur une courbe plane par les coniques de son plan appartiennent à un système spécial d'indice ρ, la courbe proposée admet une famille linéaire $\rho - 1$ fois infinie de courbes adjointes d'ordre $n-5$; ....

Sur une courbe gauche C, les groupes, spéciaux ou non, d'un même système, sont formés par les points qui correspondent aux points d'une des courbes planes sur lesquelles C est représentable point par point.

Une courbe gauche, d'ordre n, est dite *spéciale* lorsque le groupe formé par les n points où elle est rencontrée par un plan quelconque détermine un système spécial. Les courbes gauches spéciales présentent un grand intérêt : c'est à leur existence que tiennent les difficultés du problème de la classification des courbes gauches d'un degré donné.

Toute courbe gauche pour laquelle on a $p \geqq n-2$ est spéciale; en

effet, les n points où elle est coupée par un plan déterminent un système de groupes dont la multiplicité est au moins égale à 3; par suite, pour ce système, $p - h + r$, c'est-à-dire $p - n + r$, est au moins égal à 1, si $p > n - 2$; le système est donc spécial.

86. Revenons maintenant aux courbes tracées sur la surface de Kummer, et introduisons, pour simplifier le langage, une nouvelle définition.

Nous dirons que deux fonctions thêta normales, simultanément paires ou impaires, appartiennent à la même *série* si leurs ordres diffèrent d'un nombre pair d'unités et si elles ont même caractéristique. D'après cela, les fonctions normales paires et impaires se répartissent en 64 séries; il y a, pour les fonctions paires, 32 séries, se subdivisant en 16 séries de fonctions d'ordre pair et 16 séries de fonctions d'ordre impair; de même pour les fonctions impaires : c'est la traduction des résultats des n^{os} **4** et **5**. Les courbes de la surface de Kummer qui correspondent aux fonctions d'une même série passent toutes par les mêmes points singuliers de la surface; les degrés de deux quelconques d'entre elles diffèrent de $4n$ unités. Nous dirons également qu'elles appartiennent à la même *série*.

87. Si la courbe d'ordre $2m$, passant simplement par $2s$ points singuliers de la surface de Kummer, a d points doubles, la valeur trouvée au n° **80** pour le genre devra être diminuée de d unités. On a ainsi

$$p = 1 + \tfrac{1}{2}(m^2 - s) - d.$$

Si la condition $p \geqq 2m - 2$ est vérifiée, la courbe sera spéciale (n° **85**); or, si d est nul, il est à remarquer que l'inégalité précédente est toujours vérifiée dès que m dépasse 4; ainsi :

Toute courbe de la surface de Kummer, sans point multiple, et d'ordre supérieur à 8, *est une courbe spéciale.*

Pour préciser ce résultat, il y a lieu de déterminer la multiplicité du système spécial qui comprend les groupes de points de la courbe

situés dans un même plan; il est évident que ce nombre est au moins égal à 3; nous allons montrer qu'il a précisément la valeur 3.

Soit, en effet, $\Theta_0 = 0$ l'équation d'une courbe C_0 d'ordre $2m$, de genre p, sans point multiple; désignons par Θ' la fonction thêta la plus générale, d'ordre $m-2$, et de la même série que Θ_0, par Θ_1, Θ_2, Θ_3, Θ_4 les quatre fonctions normales d'ordre 2, de caractéristique nulle. Il est évident que la fonction

$$\Theta(u, v) = (\lambda_1\Theta_1 + \ldots + \lambda_4\Theta_4)\Theta',$$

où les λ sont des constantes arbitraires, est du même ordre, m, et de la même famille que Θ_0. Par suite, les deux systèmes de groupes définis respectivement, sur la courbe C_0, par les points mobiles d'intersection de cette courbe avec les plans $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_4 x_4 = 0$, et les courbes $\Theta' = 0$, systèmes dont le premier est spécial si p est au moins égal à $2m-2$, sont complémentaires : le second est donc également spécial, d'après le théorème de Riemann-Roch. Pour démontrer que la multiplicité du premier système est égale à 3, il suffit évidemment d'établir que *tous* les groupes de ce système sont formés de points situés dans un même plan, ou bien, en vertu du théorème de Riemann-Roch, de démontrer que toute courbe $\Theta(u, v) = 0$, de même ordre et de même famille que $\Theta_0 = 0$, qui passe par les points non fixes où la courbe C_0 est coupée par une des courbes $\Theta' = 0$, la coupe en outre en $2m$ points situés dans un même plan.

Or les courbes $\Theta = 0$, $\Theta_0 = 0$, $\Theta' = 0$ appartiennent à la même série; la première passe donc par *tous* les points, *fixes ou non*, qui sont communs aux deux dernières, en vertu de l'hypothèse même; la courbe $\Theta + \lambda\Theta_0 = 0$ passe aussi par ces points, et l'on peut choisir la constante λ de manière à la faire passer par un nouveau point de la courbe $\Theta' = 0$: elle coupe ainsi cette dernière en un point de plus que ne l'exige le théorème de M. Poincaré, et, par suite, puisque la courbe $\Theta' = 0$ peut être choisie indécomposable, la fonction $\Theta + \lambda\Theta_0$ devra contenir Θ' en facteur. Le quotient $\frac{\Theta + \lambda\Theta_0}{\Theta'}$ est, d'après la nature de Θ, Θ_0, Θ', une fonction thêta, normale, d'ordre 2, de caractéristique

nulle; il vient ainsi

$$\Theta + \lambda\Theta_0 = \Theta'(\lambda_1\Theta_1 + \ldots + \lambda_4\Theta_4),$$

ce qui montre bien que la courbe $\Theta = 0$ coupe en outre $\Theta_0 = 0$ en $2m$ points, situés dans le plan $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_4 x_4 = 0$.

Nous avons ainsi établi que la multiplicité du système spécial formé par les groupes de points de C_0 situés dans un même plan est égale à 3; de même on voit que les groupes du système complémentaire sont formés *uniquement* par les points d'intersection mobiles de la courbe C_0 (d'ordre $2m$) avec les courbes d'ordre $2m - 4$ de la même série.

88. Plus généralement, on établit de la même manière que, si p est supérieur ou égal à $2mq - \frac{1}{6}(q+1)(q+2)(q+3) + 2$, la courbe C_0 est coupée par toute surface d'ordre q suivant un groupe appartenant à un système spécial de multiplicité $\frac{1}{6}(q+1)(q+2)(q+3) - 1$; le système complémentaire est formé par les groupes des points mobiles communs à la courbe proposée et aux courbes de la même série, d'ordre $2m - 4q$.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Toute courbe, sans point multiple, tracée sur la surface de Kummer, et d'ordre $2m$, est coupée par les courbes de la même série, d'ordre $2m - 4q$, suivant des groupes de points mobiles formant un système spécial. Ce système ne comprend pas d'autres groupes que ceux ainsi définis.

Le système complémentaire est formé exclusivement par les groupes de $2mq$ points découpés sur la courbe proposée par les surfaces d'ordre q de l'espace.

Il est inutile d'énoncer la condition restrictive

$$p \geqq 2mq - \tfrac{1}{6}(q+1)(q+2)(q+3) + 2;$$

elle est vérifiée nécessairement s'il existe des courbes d'ordre $2m - 4q$, de la même série que la proposée.

Si la courbe a des points doubles, la proposition précédente s'applique aux courbes d'ordre $2m - 4q$ *adjointes* (n° **83**) à la proposée.

Il résulte aisément de ce qui précède que, sur la surface de Kummer, les seules courbes, sans point multiple, qui ne soient pas *spéciales*, sont les seize coniques, les biquadratiques, les sextiques passant par dix points singuliers et les courbes d'ordre 8 de la famille singulière.

89. *Remarque.* — Les surfaces d'ordre q découpent sur une courbe C_0 de la surface de Kummer des groupes appartenant à un système de multiplicité au moins égal à $\frac{1}{6}(q+1)(q+2)(q+3)-1$; si le système est spécial, la multiplicité a précisément cette valeur, comme nous venons de le voir. L'indice, ρ, est égal à

$$p - 2mq + \tfrac{1}{6}(q+1)(q+2)(q+3) - 1 \quad (^1),$$

p et $2m$ désignant toujours le genre et l'ordre de la courbe.

La projection de cette courbe sur un plan est une courbe, C'_0, d'ordre $2m$ et de genre p, sur laquelle existe un système de groupes spéciaux d'indice ρ; les intersections de C'_0 avec les courbes d'ordre q de son plan, forment des groupes de ce système, et, par suite (n° **83**), C'_0 admet une famille linéaire, $\rho - 1$ fois infinie, de courbes adjointes d'ordre $2m - q - 3$.

Donnons quelques exemples :

Les sextiques passant par six points singuliers situés dans un même plan se projettent suivant des courbes du sixième ordre qui ont six points doubles situés sur une conique.

Les courbes du huitième ordre ne passant par aucun point singulier se projettent suivant des courbes du même ordre, à douze points doubles : ces douze points sont sur une cubique, et sur une infinité triple de quartiques.

---

(1) Il est clair que si la courbe considérée est sur h surfaces d'ordre q, linéairement distinctes, la multiplicité et, par suite, l'indice du système doivent être diminués de h.

Les courbes du huitième ordre passant par huit points singuliers se projettent suivant des courbes du même ordre, à quatorze points doubles situés sur une infinité simple de quartiques.

90. Étudions maintenant les points mobiles communs à C_0 et aux courbes de la même série, d'ordre $2m + 4q$.

Ces courbes coupent C_0, comme on le voit de suite, en $2(p-1) + 2mq$ points mobiles; les groupes de points ainsi déterminés appartiennent évidemment à un même système, qui n'est pas spécial, puisque chaque groupe comprend plus de $2(p-1)$ points. La multiplicité de ce système est donc $p + 2mq - 2$; pour qu'il ne comprenne pas d'autres groupes que ceux qu'on vient de définir, il faut et il suffit qu'on puisse trouver un de ces groupes comprenant $p + 2mq - 2$ points arbitraires de la courbe C_0.

Or les courbes d'ordre $2m + 4q$, passant par $2s$ points singuliers de la surface de Kummer, dépendent linéairement (n° **80**) de $1 + \frac{1}{2}(m + 2q)^2 - \frac{s}{2}$ paramètres; parmi ces courbes figurent celles qui ont pour équation

$$0 = \Theta_0(\lambda_1\theta_1 + \lambda_2\theta_2 + \ldots),$$

Θ_0 étant toujours le premier membre de l'équation de C_0, et θ_1, θ_2, ... désignant les fonctions, linéairement distinctes, paires, d'ordre $2q$, de caractéristique nulle. Ces fonctions étant (n° **4**) en nombre égal à $2q^2 + 2$, on pourra, parmi les points communs à C_0 et à une courbe de la même série, d'ordre $2m + 4q$, en choisir arbitrairement un nombre égal à

$$1 + \tfrac{1}{2}(m + 2q)^2 - \frac{s}{2} - 2q^2 - 2,$$

c'est-à-dire, puisque $p = 1 + \frac{1}{2}(m^2 - s)$, égal à

$$p + 2qm - 2 \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Ainsi les groupes déterminés sur C_0 par les courbes de la même série, d'ordre $2m + 4q$, appartiennent à un système qui ne contient

pas d'autres groupes; il est clair d'ailleurs qu'on obtient un groupe particulier du système en combinant un groupe $\mathcal{G}_{2(p-1)}$ avec le groupe de $2mq$ points de C_0 situés sur une surface d'ordre q.

Voyons maintenant ce que donnent ces propriétés pour la courbe C'_0, projection de C_0.

Au système de groupes considéré correspondra, sur C'_0, un système de groupes, renfermant chacun $2mq + 2(p-1)$ points, et parmi lesquels figurent les groupes obtenus en combinant un groupe $\mathcal{G}_{2(p-1)}$ avec celui que forment les $2mq$ points de C'_0 situés sur une courbe d'ordre q. Or une courbe d'ordre $2m-3$ adjointe à C'_0 et une courbe d'ordre q forment une courbe adjointe d'ordre $2m+q-3$: donc, d'après les propriétés connues des courbes adjointes, tous les groupes du système seront découpés sur C'_0 par les courbes adjointes d'ordre $2m+q-3$ et réciproquement. Ainsi :

Soient C_0 *une courbe d'ordre* $2m$, *sans point multiple, de la surface de Kummer, et* C'_0 *la courbe du même ordre suivant laquelle elle se projette sur un plan quelconque : les courbes de la surface de Kummer de la même série que* C_0, *d'ordre* $2m+4q$, *découpent sur cette courbe des groupes de points mobiles, qui ont pour projections les groupes déterminés sur la courbe* C'_0 *par les courbes adjointes d'ordre* $2m+q-3$ *et réciproquement* (¹).

Ce théorème permet d'étendre à une courbe de la surface de Kummer les propositions si nombreuses que l'on connaît sur les groupes de points communs à une courbe plane et à ses adjointes d'un ordre donné.

Sans insister ici sur ces applications bien faciles, nous aborderons l'étude de courbes intéressantes et très générales situées sur la surface de Kummer; nous les appellerons *courbes univoques*, en raison d'une de leurs propriétés fondamentales.

(¹) Si C_0 a des points doubles, le théorème s'applique aux courbes de la même série, d'ordre $2m+4q$, qui lui sont adjointes (n° 83).

CHAPITRE X.

Courbes univoques.

91. Soit $\theta_0(u, v)$ une fonction thêta quelconque : *si cette fonction n'est ni paire, ni impaire,* et si elle ne le devient pas quand on la multiplie par $e^{-\frac{p}{2}u-\frac{q}{2}v}$ (n° **10**), la courbe $\theta(u, v) = 0$, sur la surface de Kummer, doit être en réalité considérée comme donnée par l'équation $\theta_0(u, v)\theta_0(-u, -v) = 0$; elle a été comprise dans les recherches que nous avons faites jusqu'ici (n° **14**), mais elle jouit de propriétés particulières qui rappellent celles des sections de la surface par ses plans tangents : ces sections appartiennent d'ailleurs à la catégorie de courbes dont il s'agit (n° **59**).

La fonction $\theta_0(u, v)$ peut, comme nous le savons (n° **2**), se mettre sous la forme

$$\theta_0(u, v) = \Theta_0(u - \lambda, v - \mu),$$

où $\Theta_0(u, v)$ est une fonction thêta à caractéristique nulle.

Nous retrouvons ainsi les courbes dont nous avons dit un mot au n° **61**.

Elles jouissent de cette propriété fondamentale que, pour chaque point de l'une d'elles, on peut séparer les deux couples d'arguments u, v et $-u, -v$ qui correspondent à un point de la surface de Kummer, car si la fonction $\Theta_0(u - \lambda, v - \mu)$ n'est ni paire, ni impaire, elle ne s'annule que pour un seul des systèmes d'arguments u, v et $-u, -v$ qui appartiennent à un point de la courbe

$$\Theta_0(u - \lambda, v - \mu) = 0 \qquad (\text{n° } \mathbf{60}).$$

Si la fonction $\Theta_0(u - \lambda, v - \mu)$ était paire ou impaire, on retomberait sur les courbes générales étudiées jusqu'ici, car on a vu (n° **14**) que toute fonction thêta, paire ou impaire, est nécessairement une fonction normale.

Ce cas étant exclu, il ne correspond, à un point de la courbe $\Theta_0(u - \lambda, v - \mu) = 0$, qu'un seul système de valeurs des paramètres

u et v, aux multiples près des périodes : pour rappeler cette propriété, nous donnerons aux courbes dont il s'agit le nom de *courbes univoques*.

Si $\Theta_0(u, v)$ est une fonction thêta d'ordre m, la courbe

$$\Theta_0(u - \lambda, v - \mu) = 0$$

est, d'après le théorème de M. Poincaré, *d'ordre* $4m$; *elle a* (n° **61**) m^2 *points doubles*, donnés par les deux équations

$$\Theta_0(u - \lambda, v - \mu) = 0, \qquad \Theta_0(-u - \lambda, -v - \mu) = 0.$$

Enfin, la fonction $\Theta_0(u - \lambda, v - \mu)\,\Theta_0(-u - \lambda, -v - \mu)$ étant une fonction thêta normale d'ordre $2m$, de caractéristique nulle et paire, la courbe précédente est (n° **16**) *l'intersection complète de la surface de Kummer avec une surface d'ordre m, touchant la première en m^2 points.*

La réciproque de cette dernière proposition n'est pas vraie; nous verrons, en effet, plus loin de quelles propriétés spéciales jouissent les surfaces d'ordre m qui passent par les courbes univoques d'ordre $4m$.

Les courbes représentées par l'équation

$$\Theta_0(u - \lambda, v - \mu) = 0,$$

quand on fait varier λ et μ, en laissant Θ_0 invariable, se correspondent en général point par point (n° **61**); enfin (n° **62**), le long de la courbe $\Theta_0(u - \lambda, v - \mu) = 0$, *$du$ et dv sont des différentielles abéliennes de première espèce.*

Le *genre* de cette courbe se détermine par la formule du n° **87**, où l'on fait $s = 0$ et $d = m^2$; on trouve ainsi

$$p = 1 + \tfrac{1}{2}(4m^2) - m^2 = m^2 + 1.$$

92. Soit $\Theta(u, v)$ une fonction normale quelconque, d'ordre m, à caractéristique nulle; l'intégrale

$$(1) \qquad \int \frac{\Theta(u - \lambda, v - \mu)}{\left(\dfrac{\partial \Theta_0}{\partial v}\right)}\, du$$

est une intégrale abélienne de première espèce appartenant à la courbe $\Theta_0(u-\lambda, v-\mu)=0$. Elle est abélienne, car si x, y, z désignent les coordonnées cartésiennes d'un point de la surface de Kummer, exprimées en fonction quadruplement périodiques de u et v, la fonction

$$\varphi(u, v) = \frac{\Theta(u-\lambda, v-\mu)}{\left(\frac{\partial\Theta_0}{\partial v}\right)}\frac{du}{dx}$$

peut s'écrire, le long de la courbe $\Theta_0(u-\lambda, v-\mu)=0$ (n° **81**),

$$\frac{1}{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\frac{\Theta_0(u-\lambda, v-\mu)}{\Theta(u-\lambda, v-\mu)} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\Theta_0(u-\lambda, v-\mu)}{\Theta(u-\lambda, v-\mu)}}.$$

Le dénominateur de cette expression est évidemment une fonction uniforme, quadruplement périodique de u, v : or, à un point de la courbe $\Theta_0(u-\lambda, v-\mu)$, ne correspond, aux multiples près des périodes, qu'un seul système de valeurs de u, v (n° **91**) et, par suite, qu'une seule valeur de la fonction $\varphi(u, v)$: celle-ci est donc exprimable rationnellement en fonction des coordonnées du point (u, v) de la courbe $\Theta_0(u-\lambda, v-\mu)=0$. En d'autres termes, l'intégrale considérée est abélienne.

Elle est de première espèce, car il est manifeste qu'elle ne devient infinie en aucun point de la courbe $\Theta_0=0$, à moins que celle-ci n'ait, en dehors des m^2 points indiqués plus haut, d'autres points doubles vérifiant les relations

$$\Theta_0(u-\lambda, v-\mu)=0, \qquad \frac{\partial\Theta_0}{\partial u}=0, \qquad \frac{\partial\Theta_0}{\partial v}=0.$$

Nous écarterons, sauf avis contraire, ce cas spécial.

On trouve ainsi un nombre d'intégrales de première espèce égal à m^2-1, puisqu'il y a m^2 fonctions Θ linéairement distinctes parmi lesquelles figure Θ_0 ; ces intégrales, jointes aux intégrales $\int du$ et $\int dv$, donnent le nombre total m^2+1, ou p, des intégrales distinctes de première espèce.

93. Cela posé, nous appellerons *courbes univoques* d'un même ordre et d'une même famille celles qui sont représentées par une équation de la forme $\Theta(u-\lambda, v-\mu)=0$, où $\Theta(u, v)$ est une fonction de caractéristique nulle, d'un ordre *donné*, et où λ et μ sont *fixes* : une famille de courbes univoques est donc définie par l'ordre de la fonction $\Theta(u, v)$ et par les valeurs de λ et μ.

Il est à observer que la famille de courbes univoques définie par des valeurs λ et μ des deux paramètres est la même que celle définie par les valeurs $-\lambda$ et $-\mu$: en effet, $\Theta(u, v)$ étant une fonction normale à caractéristique nulle, la fonction $\Theta(-u, -v)$ est une fonction de même ordre et de même caractéristique, $\Theta'(u, v)$, en sorte que la courbe $\Theta(u-\lambda, v-\mu)=0$, qui est, sur la surface de Kummer, la même que la courbe $\Theta(-u-\lambda, -v-\mu)=0$, est aussi la même que la courbe $\Theta'(u+\lambda, v+\mu)=0$.

94. *Remarque.* — Deux courbes univoques d'ordres $4m$ et $4n$ se coupent en $4mn$ points; on peut observer que ces points se répartissent en deux groupes distincts de $2mn$ points chacun. En effet, les deux courbes

$$\Theta_m(u-\lambda, v-\mu)=0, \qquad \Theta_n(u-\lambda', v-\mu')=0,$$

où les Θ sont des fonctions d'ordre marqué par l'indice, se coupent aux $2mn$ points dont les coordonnées u, v vérifient les deux équations précédentes; la première pouvant aussi s'écrire

$$\Theta_m(-u-\lambda, -v-\mu)=0;$$

les $2mn$ solutions communes à cette équation et à l'équation

$$\Theta_n(u-\lambda', v-\mu')=0$$

donnent $2mn$ *nouveaux* points d'intersection des deux courbes.

Si les deux courbes sont du même ordre et de la même famille caractérisée par les valeurs λ, μ, on peut, d'une seule façon, mettre leurs équations sous la forme

$$\Theta_m(u-\lambda, v-\mu)=0, \qquad \Theta'_m(u-\lambda, v-\mu)=0;$$

les $2m^2$ points communs aux deux courbes, et dont les arguments vérifient ces deux équations, jouent un rôle plus important que les $2m^2$ autres points d'intersection. Aussi leur réservons-nous le nom de *points communs* aux deux courbes.

D'après ce qui précède, *deux courbes univoques d'un même ordre, $4m$, et d'une même famille, ont $2m^2$ points communs, formant sur chacune d'elles un groupe* $\mathcal{G}_{2(p-1)}$; mais tous les groupes $\mathcal{G}_{2(p-1)}$, sur une courbe univoque, ne sont pas obtenus de la même manière, à cause de l'existence des deux intégrales de première espèce $\int du$ et $\int dv$, qui ne rentrent pas dans le type (1).

Il serait aisé de démontrer des propositions analogues à celles des n^{os} **88** et **90**, relativement aux groupes de points découpés, sur une courbe univoque, par les courbes univoques d'ordre inférieur ou supérieur : nous ne développerons pas ici ces considérations, sur lesquelles nous aurons à revenir à propos des surfaces hyperelliptiques générales; nous nous bornerons, dans ce qui suit, à établir quelques propriétés spéciales à la surface de Kummer.

95. Soient $\Theta_0(u-\lambda, v-\mu)=0$, $\Theta(u-\lambda, v-\mu)=0$ deux courbes univoques de la même famille et d'ordre $4m$; les fonctions Θ_0 et Θ sont d'ordre m. La fonction

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi(u,v) = {} & \Theta_0(u-\lambda, v-\mu)\Theta(-u-\lambda, -v-\mu) \\ & + \Theta(u-\lambda, v-\mu)\Theta_0(-u-\lambda, -v-\mu) \end{aligned}\right.$$

est évidemment, puisque $\Theta_0(u,v)$ et $\Theta(u,v)$ sont des fonctions de caractéristique nulle, une fonction thêta normale, paire, d'ordre $2m$, de caractéristique nulle. La courbe $\varphi(u,v)=0$ est donc l'intersection complète de la surface de Kummer avec une surface d'ordre $2m$. Cette courbe, d'après la forme $\varphi(u,v)$, passe :

1° Par les points qui annulent

$$\Theta_0(u-\lambda, v-\mu) \qquad \text{et} \qquad \Theta_0(-u-\lambda, -v-\mu),$$

c'est-à-dire (n° **91**) par les points doubles de la courbe

$$\Theta_0(u-\lambda, v-\mu)=0;$$

2° Par les points doubles de la courbe $\Theta(u-\lambda, v-\mu)=0$;

3° Par les $2m^2$ *points communs* aux deux courbes univoques proposées. Donc :

Les $2m^2$ points communs à deux courbes univoques, d'ordre $4m$, de la même famille, et les m^2 points doubles de chacune d'elles sont sur une même surface d'ordre m (¹).

De même, la fonction

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi_1(u,v)= \quad & \Theta_0(u-\lambda, v-\mu)\Theta(-u-\lambda, -v-\mu) \\ & -\Theta(u-\lambda, v-\mu)\Theta_0(-u-\lambda, -v-\mu) \end{aligned}\right.$$

est une fonction thêta, normale, impaire, d'ordre $2m$, de caractéristique nulle; la courbe $\varphi_1(u,v)=0$ est donc une courbe d'ordre $4m$ de la famille singulière, et, par suite,

Les points communs à deux courbes univoques, d'ordre $4m$, de la même famille, et les m^2 points doubles de chacune d'elles sont sur une même courbe, d'ordre $4m$, de la famille singulière.

96. Une courbe univoque d'ordre $4m$, d'une famille donnée, peut se décomposer en m courbes du quatrième ordre. Soit, en effet, $\Xi_0(u,v)$ la fonction thêta normale d'ordre 1, de caractéristique nulle;

(¹) Cette proposition constitue bien un théorème. En effet, sur une surface du quatrième degré, comme la surface de Kummer, le nombre des points arbitraires par lesquels on peut faire passer une surface d'ordre m (ne comprenant pas la surface proposée) est au plus égal à

$$\tfrac{1}{6}(m+1)(m+2)(m+3)-\tfrac{1}{6}(m-3)(m-2)(m-1)-1,$$

c'est-à-dire à $2m^2+1$. Or, dans la proposition ci-dessus, on établit qu'une surface d'ordre m passe par $4m^2$ points de la surface de Kummer : c'est donc bien un théorème. Une observation analogue s'applique aux propositions qui suivent.

désignons par $\alpha_1, \beta_1; \alpha_2, \beta_2; \ldots; \alpha_m, \beta_m$ des constantes : la fonction

$$\theta(u, v) = \vartheta_0(u - \alpha_1, v - \beta_1) \ldots \vartheta_0(u - \alpha_m, v - \beta_m)$$

peut (n° **2**) être mise sous la forme $\Theta(u - \lambda, v - \mu)$, où $\Theta(u, v)$ est une fonction normale, d'ordre m, de caractéristique nulle; les quantités λ et μ sont, par exemple, données par les équations

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m - m\lambda = 0, \qquad \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_m - m\mu = 0.$$

La courbe *univoque* $\Theta(u - \lambda, v - \mu) = 0$ se décompose ainsi en m courbes d'ordre 4, sections de la surface de Kummer par m plans tangents (n° **59**); et l'on peut appliquer à ce système de m courbes les théorèmes généraux qui précèdent.

Rappelons-nous, à cet effet, que les $4m$ points communs à la courbe $\Theta_0(u - \lambda, v - \mu) = 0$ et à la courbe plane $\vartheta_0(u - \alpha, v - \beta) = 0$ se répartissent (n° **94**) en deux groupes de $2m$ points; l'un de ces groupes est défini par les équations

$$\Theta_0(u - \lambda, v - \mu) = 0, \qquad \vartheta_0(u - \alpha, v - \beta) = 0,$$

et l'autre par

$$\Theta_0(u - \lambda, v - \mu) = 0, \qquad \vartheta_0(u + \alpha, v + \beta) = 0;$$

rien ne les distingue l'un de l'autre si l'on se borne à se donner *géométriquement* le plan tangent qui coupe la surface suivant la courbe $\vartheta_0(u - \alpha, v - \beta) = 0$. Observons enfin que les points doubles de la courbe $\theta(u, v) = 0$, décomposée en m sections de la surface par des plans tangents, sont : 1° les points de contact de ces m plans; 2° $\frac{1}{2}m(m-1)$ couples de points communs à deux de ces plans et donnés (n° **91**) par des équations de la forme

$$\vartheta_0(u - \alpha_i, v - \beta_i) = 0, \qquad \vartheta_0(-u - \alpha_j, -v - \beta_j) = 0.$$

Cela posé, nous pouvons énoncer le théorème suivant, conséquence de ceux du n° **95** :

Soit C *une courbe univoque tracée sur la surface de Kummer et*

d'ordre $4m$. *On prend à volonté* $m-1$ *plans tangents de la surface, dont chacun détermine sur* C *deux groupes de* $2m$ *points, et l'on choisit arbitrairement un de ces groupes; les points des* $m-1$ *groupes ainsi obtenus sont situés, avec les* m^2 *points doubles de* C, *sur une surface* S, *d'ordre* m, *qui coupe en outre* C *en* $2m$ *points, situés dans un nouveau plan tangent de la surface de Kummer.*

La surface S *passe également par les points de contact des* m *plans tangents précédents avec la surface de Kummer, et par* $\frac{1}{2}m(m-1)$ *couples de points, communs à cette surface et aux* $\frac{1}{2}m(m-1)$ *droites d'intersection des* m *plans, pris deux à deux.*

Tous les points dont il vient d'être parlé, par lesquels passe la surface S, *sont également situés sur une même courbe de la surface de Kummer, d'ordre* $4m$, *appartenant à la famille singulière.*

Voici une application de ce théorème :

Nous savons (n° **94**) que les sections de la surface de Kummer par deux plans tangents se coupent en quatre points, qui se répartissent en deux couples, comme M. Klein l'a d'ailleurs montré par une autre voie [1]; à un couple de plans tangents correspondent ainsi deux couples de points, situés sur la surface de Kummer et sur l'arête du couple de plans : chacun de ces couples de points sera dit *conjugué* du couple de plans.

Cela posé, la courbe C du théorème précédent peut elle-même se décomposer en m sections de la surface de Kummer par des plans tangents, d'où cette proposition très générale, et qui se prête à de nombreuses applications :

Il existe des configurations remarquables *formées par* $2m$ *plans tangents de la surface de Kummer et par* $m(2m-1)$ *couples de points de cette surface :*

1° *Les* $m(2m-1)$ *couples de points sont situés respectivement sur les arêtes des* $m(2m-1)$ *couples de plans obtenus en associant deux à deux les* $2m$ *plans tangents de la configuration; sur chaque arête, le couple de points est conjugué du couple de plans;*

---

[1] Klein, *Math. Annalen*, t. XXVII, p. 107.

2° *Les* $m(2m-1)$ *couples de points et les* $2m$ *points de contact des plans sont sur une même surface d'ordre* m, S;

3° *Ils sont également sur une même courbe d'ordre* $4m$, *de la famille singulière, tracée sur la surface de Kummer,* C_{4m};

4° *Le long de la courbe* C_{4m}, *on peut inscrire à la surface de Kummer une surface d'ordre* $2m$, *qui touche chacun des* m *plans de la configuration suivant une courbe d'ordre* m; *ces* m *courbes de contact sont sur la surface* S (¹).

Le dernier paragraphe (4°) de ce théorème résultera de nos recherches ultérieures (**97**).

De plus : *parmi les* $2m$ *plans tangents d'une configuration,* $2m-1$ *sont arbitraires.*

Exemple. — Il existe des *tétraèdres* formés par quatre plans tangents de la surface de Kummer, jouissant des propriétés suivantes : *Une même quadrique,* S, *coupe chaque arête du tétraèdre en deux des points où cette arête perce la surface de Kummer, et passe en outre par les points de contact des quatre faces du tétraèdre avec la surface. Les douze points où* S *coupe les arêtes du tétraèdre et les quatre points de contact des faces sont sur une même courbe* C_8, *d'ordre* 8, *de la famille singulière; une des surfaces de Kummer inscrites à la surface de Kummer proposée le long de* C_8 *touche chaque face du tétraèdre le long de la conique suivant laquelle cette face est coupée par la quadrique* S.

En d'autres termes, les tétraèdres considérés sont des tétraèdres Göpel pour les surfaces de Kummer inscrites à la proposée.

(¹) D'après cela, l'équation de la surface inscrite d'ordre $2m$ dont il s'agit est de la forme

$$S_m^2 - P_1 P_2 \ldots P_{2m} = 0;$$

$S_m = 0$ étant celle de S, et $P_i = 0$ celle d'un des $2m$ plans de la configuration.

97. Reprenons les deux fonctions φ et φ_1 du n° **95**; on a la relation

$$(4)\quad \begin{cases} \varphi^2 - \varphi_1^2 = 4\Theta_0(u-\lambda, v-\mu) \\ \qquad\qquad \times \Theta_0(-u-\lambda, -v-\mu)\Theta(u-\lambda, v-\mu)\Theta(-u-\lambda, -v-\mu), \end{cases}$$

qui peut être interprétée géométriquement comme il suit :

Soient

$$S_m(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

l'équation d'une quelconque des surfaces d'ordre m qui coupent la surface de Kummer suivant la courbe $\varphi(u, v) = 0$ (n° **95**);

$$S_{2m} = 0$$

celle d'une des surfaces d'ordre $2m$ qui touchent la surface de Kummer le long de la courbe $\varphi_1(u, v) = 0$, qui est d'ordre $4m$ et de la famille singulière;

$$A_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad A = 0$$

les équations de deux surfaces d'ordre m, coupant respectivement la surface de Kummer suivant les courbes univoques $\Theta_0(u-\lambda, v-\mu) = 0$ et $\Theta(u-\lambda, v-\mu) = 0$ (n° **91**).

L'identité (4) peut s'écrire, en désignant par $S_m(u, v), \ldots, A(u, v)$ ce que deviennent les polynômes $S_m, \ldots, A$ lorsqu'on y remplace les coordonnées $x_1, \ldots, x_4$ par leurs valeurs hyperelliptiques correspondant à un point u, v de la surface de Kummer,

$$S_{2m}(u, v) = S_m^2(u, v) - 4A_0(u, v)A(u, v),$$

d'où l'on conclut, pour un point *quelconque* de l'espace, l'identité nouvelle

$$\begin{aligned} S_{2m}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= S_m^2(x_1, \ldots, x_4) \\ &\quad - 4A_0(x_1, \ldots, x_4)A(x_1, \ldots, x_4) + KG(x_1, \ldots, x_4), \end{aligned}$$

$K(x_1, \ldots, x_4)$ étant toujours le premier membre de l'équation de la surface de Kummer, et G désignant un polynôme d'ordre $2m - 4$.

Si l'on pose

$$(5) \qquad \Sigma_{2m} = S_{2m} - KG,$$

il vient

$$(6) \qquad \Sigma_{2m} = S_m^2 - 4A_0A.$$

La surface $\Sigma_{2m} = 0$ est, d'après (5), une surface d'ordre $2m$ touchant la surface de Kummer le long de la courbe $\varphi_1(u, v) = 0$.

L'identité (6) montre que les surfaces d'ordre m représentées par l'équation

$$(7) \qquad \omega^2 A_0 + \omega S_m + A = 0,$$

où ω est un paramètre variable, ont pour *enveloppe* la surface $\Sigma_{2m} = 0$. D'ailleurs, observons que la surface $\omega^2 A_0 + \omega S_m + A = 0$ coupe la surface de Kummer suivant une courbe ayant pour équation hyperelliptique

$$\begin{aligned} 0 = {} & \omega^2 \Theta_0(u - \lambda, v - \mu)\,\Theta_0(-u - \lambda, -v - \mu) + \omega\varphi(u, v) \\ & + \Theta(u - \lambda, v - \mu)\,\Theta(-u - \lambda, -v - \mu), \end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire, en remplaçant $\varphi(u, v)$ par sa valeur (2),

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} & [\omega\Theta_0(u - \lambda, v - \mu) + \Theta(u - \lambda, v - \mu)] \\ & \quad \times [\omega\Theta_0(-u - \lambda, -v - \mu) + \Theta(-u - \lambda, -v - \mu)] = 0, \end{aligned} \right.$$

La courbe ainsi définie est donc une *courbe univoque*, du même *ordre* et de la même *famille* que les deux courbes primitivement considérées et passant par les *points communs* à celles-ci.

Si nous remarquons enfin que, parmi les surfaces

$$\omega^2 A_0 + \omega S_m + A = 0,$$

figurent les surfaces $A_0 = 0$ et $A = 0$, nous pouvons dire que :

Toute surface d'ordre m, passant par une courbe univoque

d'ordre $4m$, est inscrite (¹) *à une surface d'ordre $2m$ qui touche la surface de Kummer suivant une courbe de la famille singulière.*

De plus : *Étant données deux surfaces d'ordre m, passant respectivement par deux courbes univoques d'ordre $4m$ et de la même famille, on peut toujours trouver une surface d'ordre $2m$, Σ, inscrite aux deux précédentes et touchant la surface de Kummer le long d'une courbe (d'ordre $4m$) de la famille singulière.*

Les courbes de contact de la surface d'ordre $2m$ avec les deux surfaces d'ordre m primitives sont sur une troisième surface d'ordre m.

Enfin, *la surface d'ordre $2m$, Σ, admet un système de surfaces inscrites d'ordre m, parmi lesquelles figurent les deux surfaces primitives, et qui coupent toutes la surface de Kummer suivant des courbes univoques d'ordre $4m$, d'une même famille, ayant $2m^2$ points communs* (²).

On peut ajouter que le lieu des points doubles de ces courbes univoques est la courbe d'ordre $4m$ de la famille singulière considérée plus haut.

La propriété (4°) des configurations signalées au n° **96** est une application immédiate du théorème précédent.

La *réciproque* de ce théorème est vraie, et s'énonce ainsi :

Si une surface d'ordre $2m$, inscrite à la surface de Kummer le long d'une courbe (d'ordre $4m$) de la famille singulière, est l'enveloppe de surfaces d'ordre m, dont l'équation renferme au second degré un paramètre variable, celles-ci coupent la surface de Kum-

---

(¹) Nous dirons, comme toujours, que deux surfaces sont inscrites l'une à l'autre lorsqu'elles se touchent tout le long de leur intersection.

(²) L'identité $\Sigma_{2m} = S_m^2 - 4A_0A$ montre que les points communs aux surfaces $S_m = 0$, $A_0 = 0$, $A = 0$ sont des points doubles de Σ_{2m}; or, parmi ces points figurent (n° 95) les *points communs* aux courbes univoques $\Theta_0(u-\lambda, v-\mu) = 0$ et $\Theta(u-\lambda, v-\mu) = 0$. Donc :

La surface Σ a m^3 points doubles, parmi lesquels figurent les $2m^2$ points communs aux courbes univoques primitives.

mer proposée suivant des courbes univoques, appartenant à la même famille, et passant toutes par les points communs *à deux d'entre elles.*

Soit, en effet, la surface d'ordre $2m$, $\Sigma_{2m} = 0$,

$$\Sigma_{2m} = S_m^2 - 4A_0A, \tag{9}$$

enveloppe des surfaces d'ordre m, $\omega^2 A_0 + \omega S_m + A = 0$.

Si elle est inscrite, le long d'une courbe de la famille singulière, à la surface de Kummer, en chaque point de celle-ci, on aura

$$\Sigma_{2m}(x_1, \ldots, x_4) = \varphi_1^2(u, v),$$

$\varphi_1(u, v)$ étant une fonction thêta *impaire*, d'ordre $2m$ et de caractéristique nulle. On a, d'ailleurs, en chaque point de la surface de Kummer,

$$S_m(x_1, \ldots, x_4) = \varphi(u, v),$$

φ étant une fonction d'ordre $2m$, de caractéristique, nulle et *paire*.

L'expression (9) de Σ_{2m} donne ainsi, sur la surface de Kummer, la relation

$$4A_0A = \varphi^2 - \varphi_1^2 = (\varphi - \varphi_1)(\varphi + \varphi_1). \tag{10}$$

Or, sur la surface de Kummer, A_0 et A sont égaux à deux fonctions thêta, $\theta_0(u, v)$ et $\theta(u, v)$, paires, d'ordre $2m$ et de caractéristique nulle; d'après cela, $\theta_0(u, v)$ ne peut être égal à aucune des fonctions d'ordre $2m$, $\varphi - \varphi_1$ et $\varphi + \varphi_1$, qui ne sont pas paires, et de même pour $\theta(u, v)$. On en conclut nécessairement que $\theta_0(u, v)$ et $\theta(u, v)$ se décomposent chacun en un produit de deux fonctions thêta, d'ordre inférieur à $2m$

$$\theta_0(u, v) = \theta_0'\theta_0'', \qquad \theta(u, v) = \theta'\theta''$$

et que l'on a

$$2\theta_0'\theta'' = \varphi - \varphi_1, \qquad 2\theta_0''\theta' = \varphi + \varphi_1. \tag{11}$$

Mais si l'on change u, v en $-u$, $-v$, θ_0 et θ ne changent pas, $\varphi - \varphi_1$ et $\varphi + \varphi_1$ sont permutés l'un dans l'autre : il en résulte bien facilement que θ'_0 et θ''_0, de même que θ' et θ'' se permutent quand on change les signes de u, v; c'est-à-dire que θ_0 et θ sont de la forme

$$\theta_0(u, v) = \theta'_0(u, v)\,\theta'_0(-u, -v); \qquad \theta(u, v) = \theta'(u, v)\,\theta'(-u, -v),$$

θ'_0 et θ' étant des fonctions thêta d'ordre m.

On en conclut, d'après (11),

$$\varphi(u, v) = \theta'_0(u, v)\,\theta'(-u, -v) + \theta'_0(-u, -v)\,\theta'(u, v),$$

et pour que $\varphi(u, v)$ soit une fonction de caractéristique nulle, il faut que les fonctions θ'_0 et θ' aient les mêmes multiplicateurs (n° **1**), c'est-à-dire qu'on puisse les mettre sous la forme

$$\theta'_0(u, v) = \Theta_0(u - \lambda, v - \mu),$$
$$\theta\,(u, v) = \Theta\,(u - \lambda, v - \mu),$$

λ et μ étant deux constantes et $\Theta_0(u, v)$, $\Theta(u, v)$ désignant deux fonctions thêta d'ordre m à caractéristique nulle.

Dès lors, la surface $\omega^2 A_0 + \omega S_m + A = 0$ coupe la surface de Kummer suivant la courbe

$$\begin{aligned} 0 = \omega^2\,\Theta_0(u - \lambda, v - \mu)\,\Theta_0(-u - \lambda, -v - \mu) + \omega\,\varphi(u, v) \\ + \Theta(u - \lambda, v - \mu)\,\Theta(-u - \lambda, -v - \mu), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} 0 = [\omega\,\Theta_0(u - \lambda, v - \mu) + \Theta(u - \lambda, v - \mu)] \\ \times [\omega\,\Theta_0(-u - \lambda, -v - \mu) + \Theta(-u - \lambda, -v - \mu)]; \end{aligned}$$

ce qui démontre la réciproque à établir.

98. Les propositions qu'on vient de faire connaître donnent une *définition géométrique des courbes univoques*, et rendent à peu près évidentes celles du n° **95**. On voit que les courbes univoques sont dé-

coupées, sur la surface de Kummer, par des surfaces inscrites à celles qui touchent la surface de Kummer le long de courbes de la famille singulière.

Par exemple, les plus simples des courbes univoques après les sections par les plans tangents, c'est-à-dire *les courbes univoques de huitième ordre, sont découpées par les quadriques inscrites aux surfaces de Kummer qui touchent la proposée le long des courbes* C_8 *de la famille singulière.*

99. On peut, suivant une marche analogue à celle du n° **95**, arriver à d'autres propriétés des courbes univoques.

Soit, en effet, $\Theta_0(u, v)$ la fonction normale, d'ordre un, de caractéristique nulle; la fonction

$$\begin{aligned} f(u, v) = {} & \Theta_0(-u-\lambda', -v-\mu')\,\Theta_0(u-\lambda, v-\mu) \\ & + \Theta_0(u-\lambda', v-\mu')\,\Theta_0(-u-\lambda, -v-\mu), \end{aligned}$$

où λ' et μ' sont des constantes, est évidemment *paire;* elle sera une fonction thêta normale (d'ordre $m+1$), et de caractéristique nulle, si l'on a

$$\lambda' = m\lambda, \qquad \mu' = m\mu.$$

En ce cas, la fonction

$$\begin{aligned} f_1(u, v) = {} & \Theta_0(-u-\lambda', -v-\mu')\,\Theta_0(u-\lambda, v-\mu) \\ & - \Theta_0(u-\lambda', v-\mu')\,\Theta_0(-u-\lambda, -v-\mu) \end{aligned}$$

sera une fonction thêta, d'ordre $m+1$, de caractéristique nulle, et *impaire.*

On peut maintenant reproduire avec les fonctions f et f_1, les raisonnements faits plus haut avec φ et φ_1; on arrive ainsi, sans difficulté, aux résultats suivants :

I. *Soit une courbe univoque quelconque d'ordre* $8m'+4$. *Par ses* $(2m'+1)^2$ *points doubles on peut mener une surface d'ordre* $m'+1$, *la coupant en outre en* $4m'+2$ *points, qui sont situés dans un même plan tangent de la surface de Kummer. Ce plan tangent*

reste fixe pour toutes les courbes univoques d'un même ordre et d'une même famille; son point de contact est également situé sur la surface d'ordre $m' + 1$.

Les $(2m' + 1)^2$ *points doubles, les* $4m' + 2$ *points simples précédents sont situés, avec le point de contact du plan tangent, sur une courbe d'ordre* $4(m' + 1)$ *de la famille singulière tracée sur la surface de Kummer.*

Toute surface d'ordre $2m' + 1$, *qui passe par une courbe univoque d'ordre* $8m' + 4$, *est inscrite à une surface d'ordre* $2m' + 2$ *qui touche elle-même la surface de Kummer le long d'une courbe de la famille singulière.*

Exemple. — Les *courbes univoques d'ordre douze* sont découpées sur la surface de Kummer par les surfaces cubiques (sans point double) inscrites à une des surfaces de Kummer qui touchent la proposée le long des courbes C_8 de la famille singulière, et réciproquement.

II. *Soit une courbe univoque quelconque d'ordre* $8m'$. *Par ses* $4m'^2$ *points doubles et par une quelconque des coniques de la surface de Kummer on peut mener une surface d'ordre* $m' + 1$, *coupant en outre la courbe proposée en* $4m'$ *points (non situés sur la conique choisie), qui sont dans un même plan tangent de la surface de Kummer. Ce plan tangent reste le même pour toutes les courbes univoques d'un même ordre et d'une même famille; son point de contact est également sur la surface d'ordre* $m' + 1$.

Les $4m'^2$ *points doubles, les* $4m'$ *points simples précédents sont situés, avec le point de contact du plan tangent, sur une surface d'ordre* $m' + 2$, *passant par trois coniques de la surface de Kummer qui forment, avec celle primitivement choisie, un groupe de Rosenhain.*

Si l'on choisit successivement les seize coniques de la surface de Kummer, les seize plans tangents qui figurent dans l'énoncé précédent se déduisent de l'un quelconque d'entre eux en augmentant u et v de demi-périodes; ils forment donc, ainsi que leurs points de contact, une configuration remarquable, étudiée par MM. Rohn et Klein, et sur laquelle nous n'insisterons pas.

100. Les deux propositions I et II sont également applicables aux courbes univoques décomposées en sections de la surface par des plans tangents ; signalons, par exemple, comme conséquence de II, ce théorème :

Soit un couple de plans tangents de la surface de Kummer, et, sur l'arête de ce couple, un quelconque des deux couples de points conjugués du couple de plans : par les deux points du couple choisi et les points de contact des deux plans, on peut mener une sextique, passant par les dix points doubles de la surface de Kummer qui ne sont pas situés dans un même plan singulier, quelconque d'ailleurs.

En transformant ce résultat par réciprocité (n° **78**), ou à l'aide d'une démonstration directe facile, on arrive à cette nouvelle proposition, qui nous sera utile plus tard :

Les points de contact d'un couple de plans tangents de la surface de Kummer et les deux points d'un des couples conjugués sont sur une même courbe d'ordre huit, de la famille singulière, ayant un point triple en un des seize points singuliers (arbitraire d'ailleurs) de la surface de Kummer.

Il serait aisé d'étendre encore les théorèmes qui précèdent en remplaçant la fonction $\mathfrak{S}_0(u, v)$ introduite au commencement du n° **99**, par une fonction normale, à caractéristique nulle, d'ordre quelconque; ces applications de la méthode générale n'offrent aucune difficulté. *(A suivre.)*

Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann (¹);

PAR M. J. HADAMARD.

1. La décomposition d'une fonction entière $F(x)$ en facteurs primaires, d'après la méthode de M. Weierstrass,

$$F(x) = e^{G(x)} \prod_{p=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\xi_p}\right) e^{Q_p(x)} \tag{1}$$

a conduit à la notion du genre de la fonction F.

On dit que F est du genre E si, dans le second membre de l'équation (1), tous les polynômes Q_p sont de degré E, et que la fonction entière $G(x)$ se réduise également à un polynôme de degré E au plus.

Dans un article inséré au *Bulletin de la Société mathématique de France* (²), M. Poincaré a démontré une propriété des fonctions de genre E. L'énoncé auquel il est parvenu est le suivant :

Dans une fonction entière de genre E, *le coefficient de* x^m, *mul-*

(¹) Les principaux résultats contenus dans le présent Mémoire ont été présentés à l'Académie des Sciences dans un travail couronné en 1892 (grand prix des Sciences mathématiques).

(²) Année 1883, pages 136 et suiv.

tiplié par la racine $E + 1^{ième}$ *du produit des* m *premiers nombres, tend vers zéro quand* m *croît indéfiniment.*

Je me propose de compléter ce théorème en étudiant, d'une façon générale, les relations qui lient les propriétés d'une fonction entière à la loi de décroissance des coefficients et, particulièrement, en démontrant la proposition inverse :

Si le coefficient de x^m *est moindre que* $\frac{1}{(m!)^{\frac{1}{\lambda}}}$, *la fonction est, en général, de genre moindre que* λ.

PREMIÈRE PARTIE.

RELATIONS ENTRE LA LOI DE DÉCROISSANCE DES COEFFICIENTS ET L'ORDRE DE GRANDEUR DE LA FONCTION POUR LES GRANDES VALEURS DE LA VARIABLE.

2. Le développement taylorien d'une fonction entière est caractérisé [1] par cette circonstance que la racine $m^{ième}$ du coefficient de x^m tend vers zéro quand m augmente indéfiniment.

Si donc une fonction entière $F(x)$ est donnée par le développement

$$F(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + \ldots, \tag{2}$$

le module de a_m peut être représenté par $\frac{1}{[\varphi(m)]^m}$, où $\varphi(m)$ est positif et infini avec m.

Pour obtenir une quantité supérieure au module de $F(x)$, nous remplacerons chaque terme de la série (2) par son module, de sorte que nous pourrons considérer a_m comme égal à $\frac{1}{[\varphi(m)]^m}$ et x comme réel et positif.

---

[1] HADAMARD, *Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor*, n° 6 (ce Journal, 4e série, t. VIII).

Nous supposerons, en outre, que $\varphi(m)$ est une fonction continue et croissante, avec cette condition que $L\varphi(m) + \frac{k}{m}$ soit, à partir d'une certaine valeur de m, constamment croissant, quel que soit le nombre k.

Dans les cas usuels, ces hypothèses se trouvent vérifiées d'elles-mêmes; mais on peut les supposer vérifiées dans le cas le plus général, à la condition de remplacer, d'une manière convenable, certains coefficients a_m par des nombres plus grands, ce qui est permis, puisque nous agrandissons ainsi la somme de la série (2).

En un mot, on peut déterminer une fonction $\chi(m)$ au plus égale, pour les valeurs entières de m, au module de a_m (l'égalité ayant lieu pour une infinité de ces valeurs) et telle que la fonction

$$(3) \qquad \varphi(m) = \sqrt[m]{\chi(m)}$$

satisfasse aux conditions que nous venons d'indiquer.

3. A cet effet, soit a_{m_0} le premier coefficient non nul. La quantité $\left|\sqrt[m-m_0]{\frac{a_m}{a_{m_0}}}\right|$, diminuant indéfiniment à mesure que m augmente, doit prendre nécessairement une valeur plus grande que toutes les autres. Soit m_1 l'indice correspondant. Pour les valeurs entières de m comprises entre m_0 et m_1, nous prendrons comme valeurs de $\chi(m)$ les termes successifs d'une progression géométrique ayant pour premier terme $\frac{1}{|a_{m_0}|}$ et pour dernier $\frac{1}{|a_{m_1}|}$, dont la raison sera, par suite, $\left|\sqrt[m_1-m_0]{\frac{a_{m_0}}{a_{m_1}}}\right|$; ce qui revient (en faisant intervenir non seulement les valeurs entières de m, mais les valeurs fractionnaires ou incommensurables) à prendre pour $\chi(m)$ une certaine exponentielle de la forme e^{am-b}, où l'on aura $a = \left|\sqrt[m_1-m_0]{\frac{a_{m_0}}{a_{m_1}}}\right|$.

Soit de même m_2 l'indice plus grand que m_1 pour lequel la quantité $\left|\sqrt[m-m_1]{\frac{a_m}{a_{m_1}}}\right|$ prend la plus grande valeur. Entre $m = m_1$ et $m = m_2$, on prendra pour valeurs de $\chi(m)$ les termes successifs d'une progres-

sion géométrique ayant pour premier terme $\frac{1}{|a_{m_1}|}$ et pour dernier $\frac{1}{|a_{m_2}|}$. La raison de cette progression, à savoir $\left|\sqrt[m_2-m_1]{\frac{a_{m_1}}{a_{m_2}}}\right|$, sera plus grande que la précédente, car l'inégalité

$$\left|\sqrt[m_2-m_0]{\frac{a_{m_2}}{a_{m_0}}}\right| < \left|\sqrt[m_1-m_0]{\frac{a_{m_1}}{a_{m_0}}}\right|$$

ou

$$\left|\frac{a_{m_0}}{a_{m_1}}\right|^{m_1-m_0}\left|\frac{a_{m_1}}{a_{m_2}}\right|^{m_1-m_0} > \left|\frac{a_{m_0}}{a_{m_1}}\right|^{m_2-m_0}$$

peut s'écrire

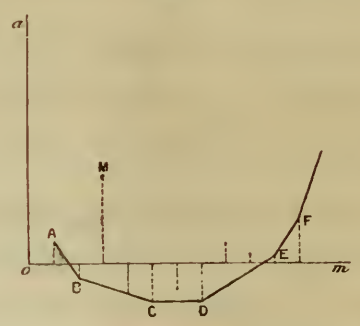
$$\left|\sqrt[m_2-m_1]{\frac{a_{m_1}}{a_{m_2}}}\right| > \left|\sqrt[m_1-m_0]{\frac{a_{m_0}}{a_{m_1}}}\right|.$$

On considérera ensuite la valeur m_3 de m pour laquelle $\left|\sqrt[m-m_2]{\frac{a_m}{a_{m_2}}}\right|$ sera le plus grand, et l'on continuera ainsi indéfiniment.

4. Au reste, ces opérations peuvent se ramener à la construction bien connue du polygone de Newton.

Pour cela on considérera m comme l'abscisse d'un point M (*fig.* 1) dont l'ordonnée sera fournie par la valeur correspondante de $L\left|\frac{1}{a_m}\right|$.

Fig. 1.



Nous aurons ainsi une suite indéfinie de points représentant les différents coefficients de notre série.

Prenons alors une demi-droite, tout d'abord parallèle à la partie négative de l'axe des y, et que nous ferons tourner autour du premier

point représentatif dans le sens trigonométrique jusqu'à ce qu'elle passe par un ou plusieurs des points suivants. Ce sera le premier côté AB de notre polygone. Pour obtenir le second, nous considérerons une droite issue du point B et que nous ferons tourner autour de ce point, etc.

Continuant ainsi à la manière ordinaire, nous tracerons une ligne brisée convexe ABC... d'une infinité de côtés, qui passera par une infinité de points représentatifs et laissera tous les autres en dessus. Les coefficients angulaires des côtés pourront être d'abord négatifs; mais, à partir d'un certain moment, ils deviendront nécessairement positifs et même de plus en plus grands.

L'ordonnée de cette ligne brisée représente le logarithme de la fonction $\chi(m)$ définie au numéro précédent, et le coefficient angulaire de OM donne la valeur de $L\varphi(m)$.

3. Nous voyons tout d'abord que $\chi(m)$ est une fonction croissante, et de manière que le rapport $\frac{\chi(m+1)}{\chi(m)}$ soit aussi croissant. Il en résulte que la fonction $\varphi(m)$, laquelle a une dérivée, sauf en des points isolés [1], est elle-même constamment et indéfiniment croissante.

En outre, m_0 étant un entier quelconque, la fonction $L\chi(m)$ est, entre $m = m_0$ et $m = m_0 + 1$, de la forme $am - b$, où

$$\begin{aligned} a &= L\chi(m_0+1) - L\chi(m_0), \\ b &= -(m_0+1)L\chi(m_0) + m_0 L\chi(m_0+1) \\ &= m_0(m_0+1)[L\varphi(m_0+1) - L\varphi(m_0)]. \end{aligned}$$

$L\varphi(m)$ étant par suite de la forme $a - \frac{b}{m}$, la quantité $L\varphi + \frac{k}{m}$ sera

---

[1] Si l'on voulait que χ et par suite φ aient une dérivée pour toute valeur de m (ce qui n'est pas nécessaire pour la suite), il suffirait de circonscrire au polygone ABC... une courbe convexe, ce qui est évidemment possible, par exemple à l'aide d'arcs de coniques se raccordant entre eux aux sommets successifs. On verrait aisément que les autres propriétés des fonctions χ et φ subsisteraient dans ces nouvelles conditions.

croissante si $b > k$. Ceci devant être vrai quel que soit le nombre k, pourvu que l'on prenne m_0 assez grand, nous avons à montrer que b augmente indéfiniment avec m_0.

Or b est constamment croissant, car l'inégalité

$$m\,\mathrm{L}\chi(m+1)-(m+1)\,\mathrm{L}\chi(m) \geqq (m-1)\,\mathrm{L}\chi(m)-m\,\mathrm{L}\chi(m-1)$$

est équivalente à l'inégalité

$$\mathrm{L}\chi(m+1)-\mathrm{L}\chi(m) \geqq \mathrm{L}\chi(m)-\mathrm{L}\chi(m-1).$$

D'ailleurs, si b restait inférieur à une quantité fixe k, on aurait

$$\mathrm{L}\varphi(m+1)-\mathrm{L}\varphi(m) < \frac{k}{m(m+1)}$$

et, comme le second membre est le terme général d'une série convergente, φ serait fini pour m infini, ce qui est contraire à nos hypothèses.

La fonction φ, définie comme il vient d'être dit, remplit donc les conditions que nous nous sommes imposées. Nous remarquerons que, moyennant ces conditions, λ étant un nombre fixe supérieur d'aussi peu que l'on veut à l'unité, on a, pour les grandes valeurs de m,

$$\frac{\varphi(\lambda m)}{\varphi(m)} > 1 + \frac{1}{m}, \tag{4}$$

car la fonction

$$\mathrm{L}\varphi(tm)-\mathrm{L}\varphi(m)+\frac{\lambda}{\lambda-1}\left(\frac{1}{tm}-\frac{1}{m}\right),$$

considérée comme fonction de t, est croissante, d'après nos hypothèses, à partir de $t=1$, si m a été pris suffisamment grand. Étant nulle pour $t=1$, elle sera positive pour $t=\lambda$, d'où résulte

$$\frac{\varphi(\lambda m)}{\varphi(m)} > e^m > 1 + \frac{1}{m}.$$

6. Cela posé, soit $\psi(x)$ la fonction inverse de φ, qui est également une fonction positive, continue et croissante d'une variable positive.

Je dis que $F(x)$ *croît moins vite que* $x^{\varepsilon} e^{\int \frac{\psi(x)}{x} dx}$, le nombre ε étant positif, mais aussi petit qu'on le veut.

Pour le démontrer, soit x' un nombre supérieur à x. Dans la série qui représente $F(x')$, considérons le dernier terme qui soit plus grand que 1, c'est-à-dire tel que $\varphi(m) < x'$. Son rang m_0 sera le plus grand entier contenu dans $\psi(x')$.

Ayant isolé les m_0 premiers termes pour en former un premier groupe, nous séparerons un second groupe allant depuis $m = m_0 + 1$ jusqu'à la plus grande valeur de m qui satisfasse à l'inégalité

$$\varphi(m) < x'\left(1 + \frac{1}{m_0}\right),$$

valeur qui sera désignée par m_1.

Le nombre m_0 augmentant indéfiniment avec x, le rapport $\frac{m_1}{m_0}$ tend vers l'unité, car l'inégalité (4) montre que ce rapport ne saurait demeurer supérieur à aucun nombre λ plus grand que 1.

Enfin un troisième groupe comprendra ce qui reste de la série depuis le terme de rang $m_1 + 1$ jusqu'à l'infini.

Dans la combinaison $F(x') - \left(\frac{x'}{x}\right)^{m_0} F(x)$, les m_0 premiers termes donneront une somme négative. Quant aux termes suivants, le terme en x^{m_0+h} donnera

$$a_{m_0+h} x'^{m_0+h}\left[1 - \left(\frac{x}{x'}\right)^h\right].$$

Remplaçons $\left(\frac{x}{x'}\right)^h = e^{-h\mathrm{L}\left(\frac{x'}{x}\right)}$ par la quantité plus petite $1 - h\mathrm{L}\left(\frac{x'}{x}\right)$; nous voyons qu'il nous reste le produit de $\mathrm{L}\left(\frac{x'}{x}\right)$ par une somme de termes de la forme $h\, a_{m_0+h} x'^{m_0+h}$.

Considérons d'abord les termes du deuxième groupe. $a_{m_0+h} x'^{m_0+h}$ étant inférieur à 1, la somme correspondante sera moindre que $\frac{(m_1 - m_0)^2}{2}$. Or nous pouvons supposer que $F(x')$ est supérieur à

$$e^{\int \frac{\psi x'}{x'} dx'} = e^{\int^{m_0} \frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)} dm},$$

sans quoi le théorème serait démontré; et nous allons voir que dans ces conditions le rapport $\frac{(m_1 - m_0)^2}{F(x')}$ tend vers zéro.

D'abord il nous suffit de nous occuper de $\frac{m_0^2}{F(x')}$, puisque $\frac{m_1}{m_0}$ tend vers 1. Or la quantité $\frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)}$ est, à partir d'un certain moment, plus grande que $\frac{3}{m}$, puisque la fonction $L\varphi(m) + \frac{3}{m}$ est croissante. Par suite l'intégrale $e^{\int \frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)} dm}$ est plus grande que $A m^3$, A étant une constante différente de o. $F(x')$ étant supposé plus grand que $e^{\int^{m_0} \frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)} dm}$, le rapport $\frac{m_0^2}{F(x')}$ tend bien vers zéro.

Dans les termes du troisième groupe, $a_{m_0+h} x'^{m_0+h}$ est moindre que $\left(\frac{1}{1+\frac{1}{m_0}}\right)^{m_0+h}$. Ces termes donnent donc une somme inférieure à la somme $\sum_{h=0}^{\infty} h \frac{1}{\left(1+\frac{1}{m_0}\right)^h} = (m_0+1)^2$, laquelle est, comme la précédente, de la forme $\varepsilon F(x')$; de sorte que l'on peut écrire

$$F(x')\left[1 - \varepsilon L\left(\frac{x'}{x}\right)\right] > F(x)\left(\frac{x'}{x}\right)^{\psi(x')}.$$

Prenons les logarithmes, divisons par $L\left(\frac{x'}{x}\right)$ et faisons tendre x' vers x, nous aurons

$$(5) \qquad \frac{dL\,F(x)}{dLx} < \psi(x) + \varepsilon,$$

ce qui, en intégrant, donne bien [1]

$$(6) \qquad F(x) < A x^{\varepsilon} e^{\int \frac{\psi(x)}{x} dx},$$

A étant fini.

---

[1] Plus exactement, nous voyons que, pour les valeurs de x plus grandes qu'une certaine limite, ou bien $F(x)$ est moindre que $e^{\int \frac{\psi(x)}{x} dx}$, ou bien on a l'inégalité (5). Ceci suffit manifestement pour que l'inégalité (6) soit constamment vérifiée.

Par exemple, pour la fonction

$$(7) \qquad \mathfrak{F}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} q^{m^2} x^m, \qquad |q| < 1$$

[qui est une moitié du développement d'une fonction $\theta(z)$ où l'on aurait posé $e^{2i\pi\frac{z}{\omega}} = x$], on a

$$\varphi(m) = r^m$$

(en désignant par r le module de $\frac{1}{q}$); d'où

$$\psi(x) = \frac{\mathrm{L}x}{\mathrm{L}r}.$$

En appliquant le théorème précédent, on voit que $\mathfrak{F}(x)$ augmente indéfiniment moins vite que $e^{\int \frac{\mathrm{L}x}{\mathrm{L}r}\frac{dx}{x}} = e^{\frac{\mathrm{L}^2 x}{2\mathrm{L}r}}$, ce qui est bien conforme aux résultats fournis par la théorie des fonctions elliptiques [2].

7. Envisageons en particulier le cas où l'on a

$$(8) \qquad |a_m| \leqq \frac{1}{(m!)^\alpha},$$

α étant un nombre positif quelconque.

Les formules connues pour l'approximation de la fonction Γ nous montrent que cette expression est de la forme

$$\frac{k e^{(m+1)\alpha}}{(m+1)^{\alpha(m+\frac{3}{2})}},$$

---

[1] Les formules connues correspondant à l'addition des périodes dans la fonction θ donnent

$$\mathfrak{F}(x) < A e^{\frac{\mathrm{L}^2 x}{4\mathrm{L}r}}.$$

La limite donnée par le théorème précédent est donc un peu trop élevée, ce dont il sera rendu compte plus loin.

k étant fini, de sorte que nous pouvons prendre

$$\varphi(m) = \left(\frac{m}{\mathrm{H}}\right)^{\alpha},$$

H étant une constante.

$\psi(x)$ sera de la forme $\mathrm{H}x^{\frac{1}{\alpha}}$ et l'intégrale $\int \frac{\psi(x)+\varepsilon}{x}\,dx$ aura la même forme. Nous arrivons donc à l'énoncé suivant :

Si le coefficient de x^m est moindre que $\frac{1}{(m!)^{\alpha}}$, la fonction croît moins vite que $e^{\mathrm{H}x^{\frac{1}{\alpha}}}$, où H *est une certaine constante.*

8. Au reste, dans ce cas particulier, on arriverait à la même conclusion par la comparaison directe des deux séries

$$\sum \frac{x^m}{\Gamma(m\alpha+1)}$$

(laquelle, en vertu des propriétés de la fonction Γ, peut être substituée dans notre raisonnement à $\sum \frac{x^m}{(m!)^{\alpha}}$), et

$$e^{x^{\frac{1}{\alpha}}} = \sum \frac{x^{\frac{n}{\alpha}}}{\Gamma(1+n)}.$$

En posant $\frac{n}{\alpha} = m'$ et comparant les parties des deux séries qui correspondent aux valeurs de m et de m' comprises entre les mêmes limites, on reconnaît aisément que, pour $\alpha > 1$, on a

$$\sum \frac{x^m}{\Gamma(m\alpha+1)} < e^{x^{\frac{1}{\alpha}}};$$

et, pour $\alpha < 1$,

$$\sum \frac{x^m}{\Gamma(m\alpha+1)} < \mathrm{E}\left(\frac{1}{\alpha}\right) x^{\frac{1}{\alpha}} e^{x^{\frac{1}{\alpha}}},$$

où, bien entendu, $\mathrm{E}\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ désigne le plus grand entier contenu dans $\frac{1}{\alpha}$.

Enfin, si α est un nombre entier, on peut mettre ce résultat en évidence par l'emploi de la formule

$$(9)\quad \sum \frac{x^m}{(m!)^\alpha} = \frac{1}{(2\pi)^{\alpha-1}} \int_0^{2\pi}\int^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} e^{x^{\frac{1}{\alpha}} F_{\alpha-1}(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{\alpha-1})}\, d\theta_1\, d\theta_2 \ldots d\theta_{\alpha-1},$$

où $F_{\alpha-1}$ est une fonction finie.

On peut démontrer cette formule en partant de la remarque suivante :

Si

$$f_1(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + \ldots$$

et

$$f_2(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m + \ldots$$

désignent des séries entières, la valeur de la série

$$f_3(x) = a_0 b_0 + a_1 b_1 x + \ldots + a_m b_m x^m + \ldots$$

sera donnée par l'intégrale définie

$$(10)\qquad f_3(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f_1(x^\mu e^{i\theta}) f_2(x^{1-\mu} e^{-i\theta})\, d\theta,$$

μ désignant un exposant quelconque compris entre 0 et 1.

D'après cela, supposons la formule (9) démontrée pour une certaine valeur de α. Nous pourrons, dans l'égalité (10), faire $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = \sum \frac{x^m}{(m!)^\alpha}$ avec $\mu = \frac{1}{\alpha+1}$. Cette égalité prendra bien alors la forme

$$\sum \frac{x^m}{(m!)^{\alpha+1}} = \frac{1}{(2\pi)^\alpha}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} e^{x^{\frac{1}{\alpha+1}} F_\alpha(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\alpha)}\, d\theta_1\, d\theta_2 \ldots d\theta_\alpha,$$

pourvu que l'on pose

$$F_\alpha(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\alpha) = e^{i\theta_\alpha} + e^{-\frac{i\theta_\alpha}{\alpha}} F_{\alpha-1}(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{\alpha-1}).$$

La formule (9) conduit d'ailleurs précisément à l'évaluation pré-

cédemment obtenue pour la série $\sum \frac{x^m}{(m!)^\alpha}$, car l'intégrale qui figure au second membre est évidemment plus petite que $e^{M|x|^{\frac{1}{\alpha}}}$, où M est le module maximum de $F_{\alpha-1}$.

9. Inversement, on peut chercher la loi de décroissance des coefficients, connaissant la loi de croissance de la fonction pour les grandes valeurs de x.

Dans son Mémoire précédemment cité, M. Poincaré résout cette question pour le cas particulier des fonctions que nous venons de considérer aux deux numéros précédents, en introduisant une fonction entière auxiliaire [1],

$$(11) \qquad \Phi(x) = \int_0^\infty e^{-t^\alpha} F(tx)\, dt,$$

l'intégrale étant prise sur la partie positive de l'axe réel ou suivant un chemin équivalent.

On peut étendre cette méthode au cas le plus général où, par exemple (V étant une fonction quelconque positive et indéfiniment croissante avec la variable), la fonction F est supposée croître moins vite que $e^{V(x)}$. Il faudra de même considérer l'intégrale

$$(12) \qquad \Phi(x) = \int_0^\infty e^{-V(t)} F(tx)\, dt,$$

---

[1] Nous transformons, par un changement de variable, l'expression de M. Poincaré. Sous cette nouvelle forme, les fonctions (11) et (12) présentent une remarquable analogie avec les expressions que j'ai considérées dans un Mémoire précédent (*Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor*, nos 35-37). En cet endroit, l'intégrale est prise entre les limites 0 et 1 : la fonction ainsi obtenue n'admet alors d'autres points singuliers que ceux de F, et il n'est besoin que d'hypothèses très simples sur la fonction désignée par $V(t)$. Dans le cas actuel, l'intégrale, étant prise entre 0 et ∞, est en général infinie; mais, toutes les fois qu'elle est finie, elle représente une fonction entière, ainsi qu'on le verrait par une discussion analogue à celle que j'ai présentée à l'endroit cité.

dans laquelle θ est une fonction de t telle que le rapport $\frac{\theta}{t}$ soit infini avec t, par exemple $t\mathrm{L}\,t$ ou $t^{1+\varepsilon}$.

Cette intégrale est finie, quel que soit x, et représente une fonction entière. Il en résulte immédiatement que les coefficients a_m de $\mathrm{F}(x)$ sont plus petits que les inverses des quantités successives

$$(13) \qquad \int_0^\infty e^{-\mathrm{V}(\theta)}\, t^m\, dt.$$

Pour voir la loi de décroissance de a_m, il suffira donc d'étudier la manière dont varie la quantité (13) lorsque m augmente indéfiniment.

Mais on peut arriver au même résultat plus directement par la simple considération des intégrales définies qui fournissent les coefficients lorsqu'on donne les valeurs de la fonction

$$a_m = \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathrm{C}} \frac{\mathrm{F}(z)\,dz}{z^{m+1}}.$$

Si, en effet, on prend pour le contour C une circonférence de rayon R, on voit que a_m est moindre que

$$(14) \qquad \frac{e^{\mathrm{V}(\mathrm{R})}}{\mathrm{R}^m}.$$

10. Dans cette expression, le rayon R est entièrement arbitraire. Faisons $\mathrm{R} = \mathrm{U}(m)$, en désignant par U la fonction inverse de V; nous voyons que $|\sqrt[m]{a_m}|$ est inférieur à $\frac{e}{\mathrm{U}(m)}$.

Pour $\mathrm{V}(\mathrm{R}) = \mathrm{R}^{\frac{1}{\alpha}}$, ceci donne bien le résultat obtenu par M. Poincaré, et d'après lequel $|\sqrt[m]{a_m}| < \frac{e}{m^\alpha}$.

On voit encore, par ce procédé, que, dans le développement de e^{e^x}, on a

$$|a_m| < \left(\frac{e}{\mathrm{L}_m}\right)^m;$$

et, en général, la série qui donne le développement de

$$e^{e^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{e^x}}}}}$$

(le nombre des exponentielles superposées étant μ) a ses coefficients plus petits que ceux de la série

$$\sum \frac{(ex)^m}{(\mathrm{LL}\ldots\mathrm{L}m)^m}$$

(le nombre des signes L étant $\mu - 1$).

11. Mais cette manière d'opérer donne pour a_m une limite trop élevée. Pour obtenir une limite plus approchée, posons

$$\mathrm{V}(\mathrm{R}) = \int \frac{\psi(\mathrm{R})}{\mathrm{R}}\, d\mathrm{R}$$

et cherchons le minimum de l'expression (14). Il vient, en prenant la dérivée,

$$\psi(\mathrm{R}) = m,$$

ou bien (φ étant la fonction inverse de ψ)

$$\mathrm{R} = \varphi(m)$$

et, pour cette valeur de R, l'expression (14) devient

$$(15) \qquad \frac{e^{\int \frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)}\, dm}}{\varphi(m)^m}.$$

Supposons que la fonction $\psi(x)$ croisse plus vite que $x^{\frac{1}{\alpha}}$. La fonction $\varphi(m)$ croît moins vite que m^α, de sorte que l'on a

$$\left|\sqrt[m]{\frac{1}{a_m}}\right| > e^{-\alpha}\varphi(m).$$

Il peut arriver que la fonction ψ augmente plus vite que n'importe

quelle puissance de x. Dans ce cas, on peut considérer α comme infiniment petit et écrire

$$\sqrt[m]{\left|\frac{1}{a_m}\right|} > (1-\varepsilon)\varphi(m).$$

Ceci peut être considéré comme la réciproque du théorème démontré au n° **6**. On peut donc dire que, dans ce cas, ce théorème donne la véritable relation cherchée.

Si la fonction ψ croît plus lentement que toute puissance de la variable, et par suite φ plus vite que n'importe laquelle de ces puissances, les transformations précédentes de l'expression (15) ne sont plus applicables.

Si $\varphi(m)$ est à croissance moins rapide que celle de e^{m^k}, on aura

$$\frac{\varphi'(m)}{\varphi(m)\,\mathrm{L}\varphi(m)} = \frac{d}{dm}[\mathrm{LL}\varphi(m)] < \frac{k}{m};$$

d'où résultera

$$\frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)} < k\,\mathrm{L}\varphi(m)$$

ou

$$\frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)} < \frac{k}{k+1}\frac{d}{dm}[m\,\mathrm{L}\varphi(m)],$$

et $\left|\sqrt[m]{a_m}\right|$ est moindre que $\dfrac{1}{\varphi(m)^{\frac{1}{k+1}}}$. C'est le cas de la fonction $\mathfrak{F}(x)$ étudiée au n° **6**.

Enfin, si la fonction φ est, pour les grandes valeurs de m, supérieure à toute fonction de la forme e^{m^k}, on peut affirmer en tout cas que $\sqrt[m]{a_m}$ est inférieur à $\dfrac{1}{\varphi\left(\frac{m}{2}\right)}$.

En effet l'expression (15) peut s'écrire

$$e^{\int \frac{m\varphi'(m)}{\varphi(m)}dm - m\mathrm{L}\varphi(m)} = e^{-\int \mathrm{L}\varphi(m)dm}.$$

Or, f étant une fonction quelconque à dérivée croissante, on a

$$f(m) > \frac{m}{2} f'\left(\frac{m}{2}\right) + f\left(\frac{m}{2}\right),$$

car $f(m) - f\left(\frac{m}{2}\right)$ est de la forme $\frac{m}{2} f'\left(\frac{m}{2} + \frac{\theta m}{2}\right)$. En intégrant [1], il en résulte

$$\int f(m)\,dm > m f\left(\frac{m}{2}\right).$$

En posant $f(m) = \mathrm{L}\varphi(m)$, on obtient bien

$$e^{-\int \mathrm{L}\varphi(m)\,dm} < \frac{1}{\varphi\left(\frac{m}{2}\right)^m}.$$

12. Nous allons maintenant nous occuper d'une certaine classe de fonctions qui jouent un grand rôle dans l'étude des fonctions entières : je veux parler des fonctions de la forme $e^{G(x)}$, où G est lui-même une fonction entière.

Le module d'une pareille fonction dépendant de la partie réelle de $G(x)$, nous présenterons tout d'abord quelques remarques sur la partie réelle d'une fonction entière.

Soit

$$(2) \qquad F(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + \ldots$$

une fonction holomorphe dans un cercle C ayant pour centre l'origine et pour rayon R ; P la partie réelle de cette fonction au point $x = Re^{i\theta}$ de ce cercle. Le coefficient a_m sera donné par la formule

$$(16) \qquad a_m = \frac{1}{2\pi R^m} \int_0^{2\pi} P\, e^{-mi\theta}\, d\theta.$$

Faisons croître R indéfiniment et supposons que P reste *algébri-*

[1] Nous négligeons la constante d'intégration, qui donne dans le résultat final un facteur constant.

quement (ainsi il faut remarquer qu'il n'est rien supposé sur les valeurs négatives de P) inférieur à R^λ, où λ est un certain exposant positif, soit

$$P < R^\lambda. \tag{17}$$

Je dis que F est un polynôme de degré au plus égal à λ.

Partageons, en effet, la circonférence du cercle C en deux parties : l'une C_1, formée par l'ensemble des arcs où P est positif; l'autre C_2, comprenant tous les arcs où cette quantité est négative. Soient I_1 l'intégrale $\int P\,d\theta$ considérée le long de C_1; I_2 l'intégrale $\int -P\,d\theta$ prise le long de C_2.

Le rapport $\frac{I_1}{R^m}$ tendra vers zéro pour $m > \lambda$, d'après les hypothèses faites sur P; et il en sera de même pour $\frac{I_2}{R^m}$, car la différence $I_1 - I_2$ est une constante, à savoir la partie réelle de $2\pi a_0$.

Or la formule (16) montre que le module du coefficient a_m est inférieur à $\frac{I_1 + I_2}{R^m}$. Ce coefficient ne peut donc être que nul.

En particulier, pour $\lambda = 1$, on voit que, si la partie réelle d'une fonction croît moins vite que le module de la variable, la fonction se réduit à une simple constante.

13. Nous avons supposé que l'inégalité (17) avait lieu pour toutes les valeurs suffisamment grandes de la variable; mais nous remarquerons que cette hypothèse n'est point complètement nécessaire. Les raisonnements précédents sont valables dès que l'on peut trouver une suite infinie de circonférences C dont les rayons aillent en augmentant indéfiniment et sur lesquelles l'inégalité (17) soit vérifiée.

14. Revenons maintenant aux fonctions considérées au n° **7**. Il sera préférable ici d'introduire, au lieu du nombre α, son inverse, que nous désignerons par la lettre λ, de sorte que l'on aura, pour les grandes valeurs de x

$$|F(x)| < e^{H|x|^\lambda}. \tag{18}$$

Supposons qu'une pareille fonction soit de la forme $e^{G(x)}$: la partie réelle de $G(x)$ devra rester algébriquement plus petite que $H|x|^{\lambda}$, et par suite la fonction $G(x)$ ne peut être qu'un polynôme. En particulier, si λ est plus petit que 1, la fonction G doit se réduire à une constante.

Ainsi, *lorsqu'une fonction* $F(x)$ *est de la forme* $e^{G(x)}$, *les coefficients de son développement ne peuvent pas décroître plus vite que* $\frac{1}{(m!)^{\alpha}}$, *à moins que* $G(x)$ *ne soit un polynôme.*

Il en serait de même si $F(x)$ était de la forme $\mathfrak{P}(x)e^{G(x)}$ (la lettre $\mathfrak{P}$ représentant un polynôme quelconque); car la multiplication ou la division par un polynôme n'altèrent pas le fait exprimé par l'inégalité (18).

15. Les résultats précédents présentent cette particularité de ne pas changer si l'on ajoute à la fonction $F(x)$ un polynôme quelconque; aussi peuvent-ils servir à démontrer, du moins pour les fonctions qui satisfont à la condition (8) (n° **7**), le théorème connu de M. Picard [1] sur les fonctions entières.

Considérons d'abord une fonction entière F dont les coefficients vérifient la condition (8) avec $\alpha > 1$. Le nombre λ sera plus petit que 1 et il sera impossible que F soit de la forme $\mathfrak{P}e^{G(x)}$, du moins si G ne se réduit pas à une constante. L'équation $F = 0$ admettra donc une infinité de racines, et il en sera évidemment de même pour l'équation $F(x) = P(x)$, où P est un polynôme quelconque.

C'est par exemple le cas de la fonction $\mathfrak{F}$ définie par l'égalité (7), (n° **6**).

16. Supposons maintenant α quelconque, et soit E l'entier immédiatement supérieur à $\frac{1}{\alpha}$. L'identité

$$F(x) = P(x) + \mathfrak{P}(x)e^{G(x)} \tag{19}$$

pourra avoir lieu, mais G devra être un polynôme de degré E au plus.

---

[1] *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 2e série, t. IX; 1880.

Or, dans ces conditions, l'identité (19) ne peut avoir lieu de deux façons différentes, car c'est un fait bien connu que l'équation

$$(20) \qquad Px + \mathfrak{P}(x)e^{G(x)} + P_1(x) + \mathfrak{P}_1(x)e^{G_1(x)} + \ldots = 0,$$

où $P, P_1, \ldots, \mathfrak{P}, \mathfrak{P}_1, \ldots, G, G_1$ sont des polynômes, n'admet pas d'autre solution que ses solutions banales.

On peut même ajouter que si $F_1, F_2, F_3, \ldots$ sont des fonctions entières dont les coefficients vérifient toujours la condition (8) et qui n'ont chacune qu'un nombre fini de zéros, la somme $F_1 + F_2 + F_3 + \ldots$ aura nécessairement un nombre infini de racines, à moins que F_1, $F_2, \ldots$ ne soient identiques à des facteurs constants et à des polynômes près. Cela résulte de la même proposition relative à l'équation (20).

17. La fonction F étant donnée, on peut résoudre l'équation (19) dès que l'on connaît le degré de $P(x)$. Il suffira pour cela de différentier un nombre de fois supérieur à ce degré. Le second membre prendra la forme Qe^G (où Q sera un nouveau polynôme), et, par conséquent, devra admettre un nombre fini de racines. Si l'on a obtenu ces racines, on connaîtra les polynômes Q et G, et la résolution d'équations linéaires fera connaître $\mathfrak{P}$.

En faisant, par exemple, P constant, on pourra, par ce procédé, reconnaître si l'équation

$$F = a + \mathfrak{P}e^G$$

est possible, et de la résoudre s'il y a lieu. On n'aura qu'une seule dérivée à prendre, et il viendra

$$Q = \mathfrak{P}' + G'\mathfrak{P}.$$

En égalant, dans cette identité, les coefficients de chaque puissance de x, on aura une série d'équations linéaires auxquelles devront satisfaire les coefficients de $\mathfrak{P}$.

Dans un grand nombre de cas, on pourra reconnaître immédiatement que l'équation (19) est impossible.

Faisons, par exemple,

$$F(x) = \frac{\pi}{\Gamma(1-x)} = \Gamma(x)\sin\pi x.$$

D'après les propositions connues relatives à la fonction Γ, le polynôme G devrait être du premier degré, ce qui est contraire à ce fait que la fonction F croît comme $|x|L|x|$. Donc les équations $\frac{\pi}{\Gamma(1-x)} = \mathfrak{P}(x)$, $\frac{\pi}{\Gamma(1-x)} + k\sin x = \mathfrak{P}(x)$, ... ont toujours une infinité de racines.

En général, pareil fait se produira toutes les fois que F augmentera plus vite que e^{kx^E} et moins vite que $e^{\frac{1}{k}x^{E+1}}$, quelque grand que soit k.

18. Les considérations précédentes démontrent le théorème de M. Picard pour toutes les fonctions satisfaisant à la condition (8). C'est, d'après le théorème de M. Poincaré, le cas de toutes les fonctions qui ont un genre fini.

On peut étendre une partie de ces conclusions à des fonctions de genre infini au moyen d'un raisonnement devenu classique dans cette théorie. On sait, en effet, que, si la fonction

$$F(x) = e^{G(x)},$$

qui n'a aucun zéro, était telle que l'équation $F(x) = 1$ n'admette non plus aucune solution, on en conclurait immédiatement que les mêmes propriétés appartiennent à la fonction

$$F_1(x) = \frac{1}{2i\pi}G(x).$$

Si, d'ailleurs, F croît moins vite que $e^{\psi(x)}$, on peut déduire de notre théorie que F_1 croîtra moins vite que $\psi(x)$.

Formons alors la suite des fonctions

$$f_1 = e^x, \qquad f_2 = e^{e^x}, \qquad f_3 = e^{e^{e^x}}, \qquad \ldots.$$

Si la fonction donnée F est dépassée par une fonction f_m de cette

suite, il suffira d'appliquer m fois le raisonnement précédent pour ramener F à vérifier la condition (8).

Mais, même à l'aide de l'extension précédente, la démonstration ne s'applique pas à une fonction quelconque; car on peut former une fonction entière croissant plus vite que n'importe quelle fonction f_m. On pourra, par exemple, procéder de la façon suivante :

Ayant pris une suite de nombres $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_h, \ldots$ qui tendent vers zéro, on appellera m_1 le plus petit entier tel que la racine $m_1^{\text{ième}}$ du coefficient de x^m dans $f_1(x)$ soit plus petite que ε_1, puis m_2 le plus petit entier tel que la racine $m_2^{\text{ième}}$ du coefficient de x^{m_2} dans $f_2(x)$ soit plus petite que ε_2, et ainsi de suite.

En écrivant les termes de f_1 jusqu'au rang $m_2 - 1$, puis les termes de f_2 depuis le rang m_2 jusqu'au rang $m_3 - 1$, puis les termes de f_3 depuis le terme de rang m_3 jusqu'au terme de rang $m_4 - 1$, ..., on obtiendra une fonction entière qui jouira manifestement des propriétés demandées.

DEUXIÈME PARTIE.

RECHERCHE DE L'ORDRE DE GRANDEUR DES RACINES ET DU GENRE.

19. Les résultats obtenus dans notre première Partie permettent de compléter les conclusions de M. Poincaré, dans le cas des fonctions de genre zéro.

Soit, en effet,

$$F(x) = \left(1 - \frac{x}{x_1}\right)\left(1 - \frac{x}{x_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{x_p}\right)\cdots$$

une fonction de genre zéro, et $\varphi(p)$ une fonction positive et croissante telle que le module ρ_p de x_p soit supérieur à $\varphi(p)$. Nous supposerons de plus que $\varphi(p)$ soit supérieur à p^α (où α est un nombre plus grand que 1), et cela de telle manière que le rapport $\frac{\varphi(p)}{p^{\alpha-\varepsilon}}$ soit croissant, mais le rapport $\frac{\varphi(p)}{p^{\alpha+\varepsilon}}$ décroissant.

Le module de F ne peut dépasser la quantité

$$(21)\qquad F_0(R) = \left[1 + \frac{R}{\varphi(1)}\right]\left[1 + \frac{R}{\varphi(2)}\right]\cdots\left[1 + \frac{R}{\varphi(p)}\right]\cdots,$$

où R est le module de x.

Pour évaluer F_0, prenons les dérivées logarithmiques des deux membres de l'équation (21); nous trouvons

$$(22)\qquad \frac{d}{dR} LF_0(R) = \frac{1}{\varphi(1) + R} + \frac{1}{\varphi(2) + R} + \ldots + \frac{1}{\varphi(p) + R} + \ldots.$$

Soit ψ la fonction inverse de φ et, dans le second membre, isolons les $p_0 = \psi(R)$ premiers termes. Leur somme sera moindre que $\frac{\psi(R)}{R}$. Quant à la somme des termes qui restent, elle est inférieure à

$$\frac{1}{\varphi(p_0)} + \frac{1}{\varphi(p_0 + 1)} + \ldots.$$

Cette dernière quantité s'évalue à l'aide des procédés employés dans la théorie élémentaire des séries. On la remplace tout d'abord par la somme

$$(23)\qquad \frac{(l-1)p_0}{\varphi(p_0)} + \frac{(l^2-l)p_0}{\varphi(lp_0)} + \frac{(l^3-l^2)p_0}{\varphi(l^2p_0)} + \ldots,$$

où l est un nombre quelconque plus grand que 1. D'ailleurs, les hypothèses relatives à la fonction φ donnent

$$\varphi(l^\mu p_0) > l_0^{\mu\alpha'}\varphi(p_0),$$

où ($\alpha = \alpha - \varepsilon$). La série (23) est donc moindre que

$$\frac{(l-1)p_0}{\varphi(p_0)} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{l^{\mu(\alpha'-1)}} = \frac{p_0}{\varphi(p_0)} \cdot \frac{l^{\alpha'-1}(l-1)}{l^{\alpha'-1}-1}.$$

Le second facteur $\frac{l^{\alpha'-1}(l-1)}{l^{\alpha'-1}-1}$ a pour limite $\frac{1}{\alpha'-1}$ lorsque l tend

vers 1, de sorte que la série (23) peut être remplacée par

$$\frac{1+\varepsilon}{\alpha-1}\frac{p_0}{\varphi(p_0)} = \frac{1+\varepsilon}{\alpha-1}\frac{\psi(R)}{R}.$$

Il vient donc [1]

$$\frac{d}{dR}\,LF_0(R) < \frac{\alpha+\varepsilon}{\alpha-1}\frac{\psi(R)}{R},$$

ou

$$F_0(R) < e^{\frac{\alpha+\varepsilon}{\alpha-1}\int\frac{\psi(R)}{R}dR}. \tag{24}$$

20. Ainsi le module de F ne peut croître plus vite que le second membre de l'inégalité précédente.

Si maintenant nous appliquons les conclusions du n° **11**, en supposant, pour fixer les idées, que α soit fini, nous voyons que la racine $m^{\text{ième}}$ du coefficient a_m est moindre que $\dfrac{e^\alpha}{\varphi\left(\dfrac{\alpha-1}{\alpha+\varepsilon}m\right)}$, ce qui peut encore s'écrire $\dfrac{\left(\dfrac{e\alpha}{\alpha-1}\right)^{\alpha+\varepsilon}}{\varphi(m)}$, puisque $\varphi(m)$ croît moins vite que $m^{\alpha+\varepsilon}$.

---

(1) La limite ainsi obtenue est trop élevée. On peut, dans la plupart des cas, en obtenir une plus approchée en formant un second groupe avec les termes de la série (22) dont le rang est compris entre $\psi(R)$ et $2^{\frac{1}{\alpha}}\psi(R)$, lesquels sont tous plus petits que $\frac{1}{2R}$; puis un troisième groupe allant du rang $2^{\frac{1}{\alpha}}\psi(R)$ au rang $3^{\frac{1}{\alpha}}\psi(R)$, les termes étant alors plus petits que $\frac{1}{3R}$. Après séparation d'un certain nombre de ces groupes, on calcule le reste de la série comme il a été expliqué. On trouve ainsi pour la série (22) $\left[\text{en laissant de côté le facteur } \frac{\psi(R)}{R}\right]$ les limites $\dfrac{1+\dfrac{\alpha}{\alpha-1}2^\alpha}{2}+\varepsilon$, $\dfrac{1}{2}+\dfrac{2^{\frac{1}{\alpha}}}{6}+\dfrac{\dfrac{\alpha}{\alpha-1}3^{\frac{1}{\alpha}}}{3}+\varepsilon$, ...

Pour $\alpha=2$, le coefficient de $\frac{\psi(R)}{R}$ serait (au terme ε près)

$$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{6}+2\frac{\sqrt{3}}{3}=1,88\ldots$$

au lieu de 2.

21. Nous allons maintenant nous occuper de la question inverse et chercher comment on peut obtenir la loi de distribution des racines quand on connaît la loi des coefficients.

Cette recherche repose sur les formules que j'ai données dans un précédent travail [1], et qui permettent de calculer les zéros successifs d'une fonction à l'aide des coefficients de son développement. Je vais tout d'abord résumer succinctement la marche suivie pour arriver à ces formules, en renvoyant pour les détails au Mémoire dont je viens de parler.

On commence par introduire une définition, celle de la *limite supérieure* d'une suite telle que

$$(25) \qquad u_0, \quad u_1, \quad \ldots, \quad u_m, \quad \ldots,$$

pour m infini (les u étant des nombres réels).

C'est la plus petite quantité qui ne soit pas dépassée, ou du moins soit infiniment peu dépassée par les termes de la suite (25) à indices infiniment grands; ou encore, cette limite supérieure l est le plus grand nombre jouissant de cette propriété que dans la suite (25) on puisse trouver une série indéfinie de termes tendant vers l.

Dans un grand nombre de cas, l est la seule quantité satisfaisant à cette dernière condition. Alors l est, pour la suite (25), une limite, au sens ordinaire du mot. Nous exprimerons souvent ce fait en disant que les termes de la suite (25) *tendent régulièrement* vers l.

La notion de limite supérieure fournit d'abord une expression du rayon de convergence d'une série entière quelconque

$$(2) \qquad F(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + \ldots.$$

Il suffit, en effet, de former la suite

$$|a_1|, \quad |\sqrt[2]{a_2}|, \quad \ldots, \quad |\sqrt[m]{a_m}|, \quad \ldots.$$

---

[1] *Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor*, 1re et 2e Parties (ce Journal, 4e série, t. VIII; 1892).

Soit l la limite supérieure (supposée finie) de cette suite. Le rayon cherché est donné par la formule $\rho = \frac{1}{l}$.

22. Proposons-nous maintenant d'exprimer que les points singuliers situés sur le cercle de rayon ρ sont des pôles au nombre de P (chaque pôle étant compté avec son degré de multiplicité).

S'il en est ainsi, on pourra débarrasser la fonction de ces pôles en la multipliant par un polynôme de degré P

$$\mathfrak{P}_{\mathrm{P}} = 1 + \mathrm{A}^{(1)}x + \ldots + \mathrm{A}^{(\mathrm{P})}x^{\mathrm{P}}$$

et la nouvelle série ainsi obtenue

$$\mathrm{F}_1 = \Sigma\, b_m x^m$$

sera convergente dans un cercle de rayon $\rho' > \rho$, de sorte qu'on pourra écrire

$$(26) \qquad b_{m+\mathrm{P}} = a_{m+\mathrm{P}} + \mathrm{A}^{(1)}a_{m+\mathrm{P}-1} + \ldots + \mathrm{A}^{(\mathrm{P})}a_m = \left[\frac{\theta(1+\varepsilon)}{\rho'}\right]^m,$$

où θ est de module inférieur à 1 et ε un infiniment petit.

Réciproquement, s'il existe des nombres $\mathrm{A}^{(1)}, \mathrm{A}^{(2)}, \ldots, \mathrm{A}^{(\mathrm{P})}$ jouissant de la propriété précédente, la fonction donnée ne pourra posséder sur le cercle primitif d'autres points singuliers que des pôles, dont les affixes seront racines de l'équation

$$(27) \qquad 1 + \mathrm{A}^{(1)}x + \ldots + \mathrm{A}^{(\mathrm{P})}x^{\mathrm{P}} = 0.$$

Elle admettra bien tous ces pôles s'il est impossible de trouver un polynôme de degré moindre que P et remplissant les mêmes conditions.

23. Considérons alors le déterminant symétrique d'ordre $p+1$

$$(28) \qquad \mathrm{D}_{m,p} = \begin{vmatrix} a_m & a_{m+1} & \ldots & a_{m+p} \\ a_{m+1} & a_{m+2} & \ldots & a_{m+p+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m+p} & a_{m+p+1} & \ldots & a_{m+2p} \end{vmatrix},$$

p étant un entier quelconque. Nous désignerons par l_p la limite supérieure de $\sqrt[m]{|D_{m,p}|}$ pour un infini (p restant fixe).

Tout d'abord, quels que soient les points singuliers de notre fonction sur son cercle de convergence, l_p ne peut dépasser $\left(\frac{1}{\rho}\right)^{p+1}$, d'après ce qui a été supposé sur l'ordre de grandeur de a_m.

Mais, si le polynôme $\mathfrak{P}_P$ existe, nous trouverons pour l_P une valeur nécessairement moindre que la limite précédente. Car on pourra, dans la dernière colonne du déterminant (28), remplacer les a par les b de même indice, lesquels sont inférieurs à $\left(\frac{1+\varepsilon}{\rho'}\right)^m$. Il viendra donc

$$l_P \leq \frac{1}{\rho^P \rho'}.$$

24. Inversement, supposons que l'inégalité

$$l_p < \frac{1}{\rho^{p+1}} \tag{29}$$

soit vérifiée pour $p = P$, mais non pour aucune valeur moindre de p.

En particulier, la quantité $\sqrt[m]{|D_{m,P-1}|}$ a pour limite supérieure $\rho^{\frac{1}{P}}$.

On démontre tout d'abord qu'elle tend régulièrement vers cette limite; puis on détermine les coefficients $A_m^{(1)}, \ldots, A_m^{(P)}$ par les équations

$$\begin{aligned}
a_{m+P} \quad &+ A_m^{(1)} a_{m+P-1} + \ldots + A_m^{(P)} a_m &&= 0,\\
a_{m+P+1} &+ A_m^{(1)} a_{m+P} \quad + \ldots + A_m^{(P)} a_{m+1} &&= 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &&,\\
a_{m+2P-1} &+ A_m^{(1)} a_{m+2P-2} + \ldots + A_m^{(P)} a_{m+P-1} &&= 0.
\end{aligned}$$

Si l'on fait augmenter m indéfiniment, on constate que $A_m^{(1)}, A_m^{(2)}, \ldots, A_m^{(P)}$ tendent respectivement vers des limites $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(P)}$, lesquelles vérifient les équations (26) en prenant pour ρ' la valeur fournie par l'équation $l_P = \frac{1}{\rho^P \rho'}$.

La fonction, considérée sur le cercle de rayon ρ, admet donc au plus P pôles, les racines de l'équation (27). Elle les admet d'ailleurs tous, sans quoi l'inégalité (29) serait vérifiée pour $p < P$.

Soient $x = x_1$, $x = x_2$, .. , $x = x_p$, ... les différents pôles de notre fonction, rangés par ordre de module croissant (les pôles de module égal étant rangés dans un ordre arbitraire); $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p, \ldots$ leurs modules. Les P premiers de ces modules seront tous égaux à ρ, de sorte que l'on aura, pour toutes les valeurs de p inférieurs à P, l'équation

$$(30) \qquad \frac{1}{\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_p} = l_{p-1}.$$

25. Considérons maintenant les valeurs de p supérieures à P. Pour une quelconque de ces valeurs, l_p sera au plus égal à $\frac{1}{\rho^{\mathrm{P}} \rho'^{p-\mathrm{P}+1}}$, et cela quels que soient les points singuliers situés sur le cercle de rayon ρ', ainsi qu'on le voit en transformant à l'aide des équations (26) les $p - \mathrm{P} + 1$ dernières colonnes du déterminant (28).

Mais si ces points singuliers sont des pôles au nombre de P′, une nouvelle réduction se produira pour $p = \mathrm{P} + \mathrm{P}'$; car il existera un polynôme de degré $\mathrm{P} + \mathrm{P}'$,

$$\mathfrak{P}'_{\mathrm{P}+\mathrm{P}'} = 1 + \mathrm{B}^{(1)} x + \ldots + \mathrm{B}^{(\mathrm{P}+\mathrm{P}')} x^{\mathrm{P}+\mathrm{P}'},$$

tel que la série $\mathrm{F}_2 = \mathfrak{P}' \mathrm{F} = \Sigma c_m x^m$ ait un rayon de convergence ρ'' supérieur à ρ'. Comme dans le déterminant $\mathrm{D}_{m,\mathrm{P}+\mathrm{P}'}$ on peut remplacer les éléments de la dernière colonne par les c de même indice, on voit que $l_{\mathrm{P}+\mathrm{P}'}$ ne peut être supérieur à $\frac{1}{\rho^{\mathrm{P}} \rho'^{\mathrm{P}'} \rho''}$.

Inversement, considérant la suite des valeurs de p à partir de $p = \mathrm{P}$, on en rencontrera d'abord un certain nombre (qui peuvent d'ailleurs se réduire à une seule, $p = \mathrm{P}$) pour lesquelles l_p est égal à $\frac{1}{\rho^{\mathrm{P}} \rho'^{p-\mathrm{P}+1}}$.

Si après cette série de valeurs en survient une, $p = \mathrm{P} + \mathrm{P}'$, pour laquelle l_p soit égal à $\frac{1}{\rho^{\mathrm{P}} \rho'^{\mathrm{P}'} \rho''}$, où ρ'' est supérieur à ρ', cette circonstance dénotera, comme on le démontre à l'aide de raisonnements analogues aux précédents, la présence de P′ pôles sur le cercle de rayon ρ'.

Les modules $\rho_{P+1}, \ldots, \rho_{P+P'}$ sont donc tous égaux à ρ', et, par suite, on aura pour les valeurs de p comprises entre P et P + P′ inclusivement

$$\frac{1}{\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_p} = \frac{1}{\rho^P \rho'^{p-P}},$$

c'est-à-dire l'équation (30), d'après ce que nous savons sur les nombres $l_P, \ldots, l_{P+1}$.

Ayant ainsi étudié les valeurs de l_p jusqu'à $p = P + P'$, on considérera les valeurs suivantes, et ainsi de suite indéfiniment.

On constate tout d'abord par ce procédé que le rapport $\frac{l_{p-1}}{l_p}$ ne va jamais en diminuant. La condition nécessaire et suffisante pour que notre fonction soit méromorphe dans tout le plan est que ce rapport augmente indéfiniment. S'il en est ainsi, les raisonnements précédents, appliqués aux valeurs de p pour lesquelles le rapport $\frac{l_{p-1}}{l_p}$ présente une croissance, permettent de calculer les affixes des différents pôles. Mais nous n'avons besoin, pour ce qui va suivre, que des modules de ces pôles.

A ce point de vue nos conclusions peuvent se résumer dans l'énoncé suivant :

L'équation (30) *est générale.*

26. Ayant appris à calculer les pôles d'une fonction $F(x)$ donnée par un développement taylorien quelconque, nous sommes à même de résoudre le même problème pour les zéros d'une telle fonction, car ces zéros ne sont autres que les pôles de la fonction $\frac{1}{F(x)}$.

Le calcul des coefficients d'une fonction à l'aide des coefficients de son inverse n'offre aucune difficulté.

Soit, comme précédemment, la fonction

$$(2) \qquad F(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m + \ldots,$$

dans laquelle seulement a_0 est supposé différent de zéro. On multipliera

cette série par la série

$$f(x) = C_0 + C_1 x + \ldots + C_m x^m + \ldots,$$

et, en égalant à zéro les coefficients de la série produit, à partir du second, on déterminera C_0, C_1, ..., etc. Des valeurs ainsi trouvées on déduit aisément l'expression du déterminant $D_{m,p}$ formé, comme nous l'avons expliqué, à l'aide des coefficients de la série $f(x)$. On trouve ainsi pour ce déterminant la valeur

$$(-1)^{m(p-1)+\frac{p(p+1)}{2}} \frac{E_{m,p}}{a_0^{m+2p+1}},$$

où l'on a posé

$$(31) \qquad E_{m,p} = \begin{vmatrix} a_{p+1} & a_p & a_0 & 0 & . & \ldots & 0 \\ a_{p+2} & a_{p+1} & a_1 & a_0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & .. & .. & . & \ldots & . \\ a_{m+p-1} & \ldots & .. & .. & . & \ldots & a_0 \\ \ldots & \ldots & .. & .. & . & \ldots & . \\ a_{m+2p} & \ldots & .. & .. & . & \ldots & a_{p+1} \end{vmatrix}$$

et l'équation (30) devient, en y changeant p en $p+1$,

$$(32) \qquad \frac{1}{\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_{p+1}} = l_p = \limsup_{m=\infty} . \sqrt[m]{\left|\frac{E_{m,p}}{a_0^{m+2p+1}}\right|} = \frac{1}{|a_0|} \limsup_{m=\infty} . \sqrt[m]{|E_{m,p}|},$$

$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_p, \ldots$ désignant cette fois les modules des zéros de $F(x)$.

Telle est la formule dont nous avions besoin de rappeler la démonstration et qui va nous servir de point de départ.

27. Supposons que $F(x)$ soit une fonction entière et que le coefficient a_m soit moindre que $\frac{1}{\chi(m)} = \frac{1}{\varphi(m)^m}$, où $\varphi(m)$ est une fonction positive indéfiniment croissante de m. Nous admettrons en outre que le rapport $\frac{\chi(m+1)}{\chi(m)}$ est constamment croissant, hypothèse toujours légitime, d'après ce qui a été expliqué aux n^{os} **3-5**.

Nous aurons un maximum du déterminant $E_{m,p}$, défini par la for-

mule (31), en y considérant tous les termes comme positifs et remplaçant chaque coefficient a_m par la valeur correspondante de $\frac{1}{\chi(m)}$, autrement dit en imaginant que dans le déterminant

$$(33)\quad \Delta = \begin{vmatrix} \frac{1}{\chi(p+1)} & \frac{1}{\chi(p)} & \cdots & \frac{1}{\chi(0)} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{1}{\chi(p+2)} & \frac{1}{\chi(p+1)} & \cdots & \frac{1}{\chi(1)} & \frac{1}{\chi(0)} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \frac{1}{\chi(m+p-1)} & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \frac{1}{\chi(0)} \\ \frac{1}{\chi(m+p)} & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \frac{1}{\chi(1)} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{\chi(m+2p)} & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdot & \cdots & \frac{1}{\chi(p+1)} \end{vmatrix}$$

on convienne de prendre tous les termes avec le signe $+$.

Dans le déterminant (33), l'élément $a_{i,k}$ correspondant à la colonne de rang i et à la ligne de rang k est égal à zéro si $i-k>p+1$ et à $\frac{1}{\chi(p+1+k-i)}$ dans le cas contraire. Le nombre des termes est

$$(p+2)^{m-1}(p+1)!$$

Je dis que le plus grand terme est celui qui correspond à la diagonale principale.

Effectivement tout autre terme que celui-là présente au moins une *inversion*, suivant la locution usitée dans la théorie élémentaire des déterminants. Il contient donc en facteurs deux éléments $a_{i,k'}.a_{i',k}$ tels que $i<i'$, $k<k'$. Si à ce produit on substitue le produit $a_{i,k}.a_{i',k'}$, on obtient un autre terme du déterminant, et ce nouveau terme est plus grand que le précédent. Ceci résulte de ce que le rapport $\frac{a_{i+1,k}}{a_{i,k}}=\frac{\chi(p+1+k-i)}{\chi(p+1+k-i-1)}$ est croissant avec k, d'après les hypothèses faites sur la fonction χ. Il en est de même des rapports

$\frac{a_{i+2,k}}{a_{i+1,k}}, \ldots, \frac{a_{i',k}}{a_{i'-1,k}}$ et par suite de leur produit $\frac{a_{i',k}}{a_{i,k}}$. On a donc bien

$$\frac{a_{i',k'}}{a_{i,k'}} > \frac{a_{i',k}}{a_{i,k}}.$$

Le plus grand terme est donc celui qui ne renferme pas d'inversion, c'est-à-dire le terme principal.

Il en résulte

$$|E_{m,p}| \leqq (p+1)!\,(p+2)^{m-1}\left[\frac{1}{\chi(p+1)}\right]^{m+p-1}$$

et

$$l_p \leqq \frac{p+2}{|a_0|\cdot\chi(p+1)}.$$

Mais le produit $\rho_1\rho_2\ldots\rho_{p+1}$ est égal à $\frac{1}{l_p}$. Le plus grand facteur de ce produit, à savoir le dernier, est donc au moins égal à $\sqrt[p+1]{\frac{1}{l_p}}$, c'est-à-dire, à un facteur près qui tend vers l'unité pour p infini, au moins égal à $\varphi(p+1)$.

Le raisonnement précédent ne s'appliquerait plus si la fonction s'annulait à l'origine. Mais on ramènerait ce cas au cas général en divisant par une puissance convenable de x et en raisonnant sur la fonction ainsi débarrassée de ses racines nulles.

Nous avons également supposé que l'inégalité

$$(34) \qquad |a_m| < \frac{1}{\chi(m)}$$

était vérifiée, quel que soit m. Mais il suffit manifestement qu'elle ait lieu pour les grandes valeurs de l'indice; car on ramènerait les premiers coefficients à vérifier la même inégalité en divisant toute la série par un certain nombre constant, ce qui ne changerait pas les racines.

La condition que le rapport $\frac{\chi(m+1)}{\chi(m)}$ soit croissant peut également n'être vérifiée que pour les grandes valeurs de m; car on pourra remplacer, s'il y a lieu, les valeurs de $\chi(m)$ jusqu'à un certain rang par d'autres qui satisfassent à cette condition.

Nous arrivons donc à cette conclusion :

THÉORÈME. — *Si le coefficient a_m décroît plus vite que $\frac{1}{\varphi(m)^m}$, la $p^{\text{ième}}$ racine a un module supérieur à* $(1-\varepsilon)\varphi(p)$, où ε est infiniment petit pour p infini.

En un mot, *les modules des racines vont en croissant plus vite que* $\frac{1}{\sqrt[m]{|a_m|}}$.

Par exemple, les racines de la fonction

$$\mathcal{F}(x) = \Sigma q^{n^2} x^n,$$

considérée au n° **6**, croissent au moins aussi vite que q^n. Il en est de même pour les racines de l'équation $\mathcal{F}(x) = \mathcal{R}(x)$, où $\mathcal{R}$ est une fonction rationnelle quelconque.

28. Venons maintenant à notre objet principal et proposons-nous d'étudier le genre d'une fonction donnée par son développement en série entière.

Pour cela, nous appliquerons le résultat que nous venons d'obtenir aux fonctions, étudiées au n° **7**, pour lesquelles on a

$$\chi(m) = (m!)^\alpha,$$

et, par suite,

$$\varphi(m) = m^\alpha.$$

Comme précédemment, nous introduirons, au lieu du nombre α, son inverse, que nous désignerons par la lettre λ.

Nous savons donc que le module ρ_p de la $p^{\text{ième}}$ racine croît, lorsque p augmente indéfiniment, plus vite que $p^{\frac{1}{\lambda}}$. Si λ n'est pas entier, et que $E+1$ soit l'entier immédiatement supérieur, la série $\sum \frac{1}{\rho_p^{E+1}}$ est convergente. Nous en conclurons plus loin que la fonction est du genre E.

Lorsque λ est un entier, il y a doute. C'est à cette hypothèse que se rattache l'exemple dont parle M. Poincaré dans son Mémoire [1] et relatif à la fonction

$$\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2 L^2 n}\right).$$

Il faudrait, dans les cas de cette espèce, étudier directement la convergence de la série $\sum_p \frac{1}{\varphi(p)^\lambda}$.

Quoi qu'il en soit, nous supposons que, le coefficient a_m étant moindre que $\frac{1}{(m!)^{\frac{1}{\lambda}}}$, nous désignerons par $E+1$ l'entier immédiatement supérieur (et non égal) à λ, de sorte que la série $\sum \frac{1}{\rho_p^{E+1}}$ soit certainement convergente. Nous pourrons former, d'après la méthode de M. Weierstrass, la fonction

$$\Phi(x)=\prod\left(1-\frac{x}{x_p}\right)e^{Q_E\left(\frac{x}{x_p}\right)}, \tag{35}$$

---

[1] M. Poincaré démontre, non seulement que a_m est plus petit que $\frac{1}{(m!)^{\frac{1}{\lambda}}}$, mais que le produit $a_m(m!)^{\frac{1}{\lambda}}$ tend vers zéro. On peut même déduire de sa démonstration que la racine $m^{\text{ième}}$ de ce produit tend vers zéro; car $a_m(m!)^{\frac{1}{\lambda}}$ se présente comme $m^{\text{ième}}$ coefficient d'une série entière.

Inversement, si la série $m^{\text{ième}}$ de $a_m(m!)^{\frac{1}{\lambda}}$ tend vers zéro, nous savons que ρ_p est égal au produit de $p^{\frac{1}{\lambda}}$ par une quantité qui augmente indéfiniment. La série $\sum \frac{1}{\rho_p^\lambda}$ est donc telle que ses termes soient avec ceux de la série harmonique dans un rapport infiniment petit pour p infini. Mais une telle série n'est pas nécessairement convergente, et le contraire se produit précisément dans l'exemple donné par M. Poincaré.

où $x_1, x_2, \ldots, x_p, \ldots$ sont les racines successives et $Q_E(z)$ est le polynôme

$$\frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^E}{E},$$

obtenu en prenant dans le développement de $-L(1-z)$ les E premiers termes.

La fonction donnée $F(x)$ sera égale au produit de $\Phi(x)$ par un facteur de la forme $e^{G(x)}$. Puisque nous avons déjà démontré que les polynômes de la formule (1) sont de degré E, tout se réduit à établir que $G(x)$ est un polynôme de degré au plus égal à E.

29. Or je vais faire voir qu'*on peut décrire, avec l'origine comme centre, des cercles aussi grands qu'on le veut sur lesquels la fonction* $\Phi(x)$ *reste constamment supérieure à* $e^{-|x|^{\lambda+\varepsilon}}$.

Les rayons de ces cercles seront déterminés ainsi qu'il suit :

Les modules ρ_p, d'après nos hypothèses, croissent plus vite que $p^{\frac{1}{\lambda}}$. Admettons en outre que la quantité $\rho_p^\lambda - p$ augmente indéfiniment, ce qui peut évidemment se faire en donnant, s'il y a lieu, un petit accroissement à λ.

Puisque $\rho_p^\lambda - p$ augmente indéfiniment, il existera une infinité d'entiers p pour chacun desquels cette quantité prendra une valeur plus petite que toutes les valeurs suivantes. Soit p_0 un tel entier, de sorte qu'on ait pour $h > 0$

$$\rho_{p_0+h}^\lambda - \rho_{p_0}^\lambda > h. \tag{36}$$

Nous déterminerons R par la relation

$$R^\lambda - \rho_{p_0}^\lambda = \tfrac{1}{2}, \tag{37}$$

de sorte que l'inégalité (36) pourra s'écrire

$$\rho_{p_0+h} > (h - \tfrac{1}{2} + R^\lambda)^{\frac{1}{\lambda}}. \tag{38}$$

Pour chaque valeur de l'entier p_0, nous aurons ainsi une valeur de R; nous obtenons donc bien une suite de cercles dont les rayons vont en augmentant indéfiniment. Je dis que ces cercles satisfont à la condition indiquée.

30. Pour plus de clarté, je considérerai d'abord le cas où λ est plus petit que 1 (l'égalité étant exclue), de façon qu'on a $E = 0$. Les facteurs exponentiels disparaissant, la formule (35) se réduit à

$$\Phi(x) = \prod \left(1 - \frac{x}{x_p}\right), \tag{35'}$$

et, lorsque le point x décrira le cercle de rayon R, le module de $\Phi(x)$ restera supérieur à la quantité

$$\prod_{p=1}^{p_0} \left(\frac{R}{\rho_p} - 1\right) \prod_{p=p_0+1}^{\infty} \left(1 - \frac{R}{\rho_p}\right). \tag{39}$$

Nous évaluerons cette expression en partageant les facteurs qui la composent en trois groupes. Le premier Π_1 comprendra tout ce qui figure sous le premier signe Π,

$$\Pi_1 = \prod_{p=1}^{p_0} \left(\frac{R}{\rho_p} - 1\right). \tag{40}$$

Le nombre p_0 de ces facteurs est, nous le savons, moindre que $R^\lambda - \frac{1}{2}$. Le plus petit est le dernier, égal à

$$\frac{R}{(R^\lambda - \frac{1}{2})^{\frac{1}{\lambda}}} - 1 = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2R^\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}} - 1,$$

par conséquent supérieur à $\frac{1}{2R^\lambda}$, puisque λ est plus petit que 1.

Si nous envisageons les autres facteurs du produit (39), la formule

(38) nous montre que l'on a

$$(41)\qquad 1-\frac{R}{\rho_{p_0+h}} > 1-\frac{1}{\left(1+\frac{h-\frac{1}{2}}{R^\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}.$$

Nous composerons le produit Π_2 avec tous les facteurs pour lesquels $h-\frac{1}{2}$ est plus petit que R^λ. Le nombre de ces facteurs est moindre que $R^\lambda+\frac{1}{2}$. Le plus petit est le premier, au moins égal à $1-\frac{R}{(R^\lambda+\frac{1}{2})^{\frac{1}{\lambda}}}$, par conséquent supérieur à $\frac{k}{2R^\lambda}$ (k restant fini pour R infini).

Les facteurs restants, qui forment le produit Π_3, peuvent se mettre sous la forme $1-u$, où $u=\frac{1}{\left(1+\frac{h-\frac{1}{2}}{R^\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}$ est plus petit que $\frac{1}{2}$.

Or, sous cette condition, on voit aisément que $1-u$ est supérieur à e^{-2u}. Chacun des facteurs du produit Π_3 est donc plus grand que la valeur correspondante de $e^{-\frac{2}{\left(1+\frac{h-\frac{1}{2}}{R^\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}}$, ou, plus simplement, de $e^{-\frac{2R}{h^{\frac{1}{\lambda}}}}$.

D'après ces remarques, on voit que le produit Π_1 est supérieur à $\left(\frac{1}{2R^\lambda}\right)^{R^\lambda}$, ou (comme $2R^\lambda$ croît moins vite que e^{R^ε}, si petit que soit ε) supérieur à $e^{-R^{\lambda+\varepsilon}}$.

Une évaluation semblable s'applique au produit Π_2.

Quant au produit Π_3, il est plus grand que $e^{-R\sigma}$, où σ est le reste de la série $\sum\frac{1}{h^{\frac{1}{\lambda}}}$ arrêtée au terme qui a pour rang l'entier h_0 immédiatement supérieur à $R^\lambda+\frac{1}{2}$. Or le reste d'une pareille série est de l'ordre de $h_0^{1-\frac{1}{\lambda}}$ ou de $R^{\lambda-1}$, de sorte que Π_3 est aussi moindre que $e^{-R^{\lambda+\varepsilon}}$.

Nous trouvons donc bien, ainsi que nous l'avons annoncé,

$$\Pi_1\Pi_2\Pi_3 > e^{-R^{\lambda+\varepsilon}}.$$

51. Pour généraliser cette proposition au cas d'un genre quelconque, nous remarquerons que, pour $u < 1$, la quantité $(1-u)e^{Q_E(u)}$ est supérieure à $1 - u^{E+1}$. C'est ce qui résulte des deux développements

$$(42)\quad \begin{cases} L(1-u) + Q_E(u) \\ \quad = -\dfrac{u^{E+1}}{E+1} - \dfrac{u^{E+2}}{E+2} - \ldots - \dfrac{u^{2(E+1)}}{2(E+1)} - \ldots - \dfrac{u^{3(E+1)}}{3(E+1)} - \ldots; \end{cases}$$

$$(43)\qquad L(1-u^{E+1}) = -u^{E+1} - \frac{u^{2(E+1)}}{2} - \frac{u^{3(E+1)}}{3} - \ldots.$$

Les termes de la série (42) sont constamment décroissants en valeur absolue. Le premier terme de la série (43) sera donc (en valeur absolue) supérieur à l'ensemble des $E+1$ premiers termes de la série (42); le deuxième terme de (43) à la somme des $E+1$ suivants, etc.

D'après cela, au lieu des facteurs $1 - \dfrac{1}{\left(1 + \dfrac{h-\frac{1}{2}}{R^\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}}$ qui composaient tout à l'heure les produit Π_2 et Π_3, nous aurons à considérer des facteurs de la forme $1 - \dfrac{1}{\left(1 + \dfrac{h-\frac{1}{2}}{R^\lambda}\right)^{\frac{E+1}{\lambda}}}$.

Pour les valeurs de h inférieures à $R^\lambda + \frac{1}{2}$, nous remplacerons $\frac{E+1}{\lambda}$ par l'unité, et nous trouverons pour le produit Π_2 de ces facteurs la même évaluation que précédemment.

Quant aux facteurs suivants, nous constatèrons comme plus haut que leur produit est supérieur à $e^{-R^{E+1}\sigma'}$, où σ' est le reste de la série $\dfrac{1}{h^{\frac{E+1}{\lambda}}}$, arrêtée au terme de rang h_0.

Ce reste étant comparable à $\dfrac{1}{h_0^{\frac{E+1}{\lambda}-1}}$, le produit Π_3 est encore supérieur à $e^{-R^{\lambda+\varepsilon}}$.

Au produit Π_1 correspondra un produit de facteurs polynômes et de facteurs exponentiels. Les premiers sont en nombre au plus égal

à $R^\lambda - \frac{1}{2}$. Le plus petit est supérieur à $\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2R^\lambda}\right)^{\frac{1}{\lambda}}} - 1$, quantité de la forme $\frac{k}{R^\lambda}$, où k est fini. Leur produit satisfait donc encore aux conclusions précédentes.

Les facteurs exponentiels sont respectivement plus grands que les quantités $e^{-\left(\frac{u}{1} + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u^E}{E}\right)}$, où $u = \frac{R}{\rho_p}$ est plus grand que 1. Nous diminuerons encore une telle quantité en supprimant les dénominateurs du polynôme Q_E. Le plus grand terme de ce polynôme devient alors le dernier et nous pourrons remplacer tous les autres par celui-là. Nous trouvons donc un produit plus grand que l'expression

$$(44) \qquad e^{-ER^E \sum_{p=1}^{p_0} \frac{1}{\rho_p^E}}.$$

ρ_p étant de l'ordre de $p^{\frac{1}{\lambda}}$, la série $\frac{1}{\rho_p^E}$ est divergente; mais sa somme, lorsqu'on la limite au terme de rang p_0, n'augmente pas plus vite que $p^{1-\frac{E}{\lambda}}$.

En prenant $p_0 = R^\lambda$ et substituant dans l'expression (44), on arrive pour cette dernière au même résultat que pour les précédentes.

32. Notre proposition auxiliaire est donc démontrée. Sur chacun des cercles de rayon R, l'inégalité

$$|\Phi(x)| > e^{-R^{\lambda+\varepsilon}}$$

est vérifiée.

Comme on a, d'autre part, ainsi qu'il a été vu au n° **7**,

$$|F(x)| < e^{HR^2},$$

il vient

$$\left|\frac{F}{\Phi}\right| = |e^{G(x)}| < e^{R^{\lambda+\varepsilon}}.$$

Dans ces conditions, nous pouvons appliquer à la fonction $e^{G(x)}$ les considérations développées aux n^{os} **12-13**, et nous en concluons que $G(x)$ est un polynôme de degré E au plus, de sorte que notre fonction F est bien du genre E.

33. Ainsi, nous avons établi que, *lorsque le coefficient a_m est de l'ordre de $\frac{1}{(m!)^{\frac{1}{\lambda}}}$, où λ n'est pas entier, la fonction $\Sigma a_m x^m$ est du genre* E, *en désignant par* E + 1 *l'entier immédiatement supérieur à* λ. La réciproque du théorème de M. Poincaré est donc bien établie pour λ non entier.

Si λ est un entier E + 1, il y a doute. Notre fonction peut être du genre E ou du genre E + 1.

A cause de ce cas douteux, les recherches précédentes ne permettent pas encore de résoudre complètement la question posée par M. Poincaré dans son Mémoire, et de décider si le genre se conserve dans la différentiation ou dans une combinaison linéaire. Nous pouvons seulement affirmer que la dérivée d'une fonction de genre E ou la somme de deux pareilles fonctions est *en général* de genre E et *au plus* de genre E + 1.

Le cas où les résultats précédents affectent la forme la plus simple est celui où, λ étant plus petit que 1, le genre est égal à zéro.

C'est ce qui arrivera, par exemple, pour $\frac{\sin x}{x}$ si l'on considère cette quantité comme fonction de x^2. Nous complétons ainsi, comme on le voit, la démonstration de la formule

$$\frac{\sin x}{x} = \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\cdots$$

On sait en effet que, dans les cours de Calcul intégral ([1]), on n'arrive pas à déduire immédiatement cette formule du théorème de M. Weierstrass. Une démonstration spéciale est nécessaire pour établir que le facteur exponentiel disparaît.

([1]) *Voir*, par exemple, PICARD, *Cours d'Analyse*, t. II, p. 151.

Ici, cette circonstance apparaît tout d'abord, en supposant seulement connu le développement taylorien de $\sin x$, ou, plus simplement encore, en partant de sa relation avec la fonction exponentielle.

La fonction $\mathcal{F}(x)$ du n° **6** est également du genre zéro, ainsi que ses combinaisons linéaires avec d'autres fonctions analogues ou des polynômes, etc.

TROISIÈME PARTIE.

APPLICATION A LA FONCTION DE RIEMANN.

54. Dans son Mémoire intitulé : *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* [1], Riemann utilise les propriétés de la fonction

$$\zeta(s) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

dont l'étude est elle-même ramenée à celle d'une fonction entière $\xi(x)$ donnée par la formule

$$(45) \qquad \xi(x) = \frac{1}{2} - \left(x^2 + \frac{1}{4}\right) \int_1^{\infty} \Psi(t)\, t^{-\frac{3}{4}} \cos\left(\frac{x}{2} \log t\right) dt,$$

où

$$(46) \qquad \Psi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi t}.$$

L'analyse de Riemann repose sur ce fait que $\xi(x)$, considéré comme fonction de x^2, est de genre zéro, fait qui est énoncé dans son Mémoire, mais sans démonstration suffisante.

Les recherches précédentes vont nous permettre de déterminer en toute rigueur le genre de $\xi(x)$.

---

[1] RIEMANN, *Œuvres complètes* (Ed. Weber et Dedekind), p. 136 et suiv.

35. Nous aurons tout d'abord à développer ξ en série. L'intégrale qui figure au second membre de la formule (45) est de la forme $\Sigma(-1)^m C_{2m} x^{2m}$, où l'on a

$$(47) \qquad C_m = \frac{1}{2^m m!} \int_1^\infty \Psi(t)\, t^{-\frac{3}{4}} (\log t)^m \, dt.$$

On aura donc, en considérant ξ comme fonction de x^2,

$$(48) \qquad \xi(x) = \sum_0^\infty a_m x^{2m},$$

où les coefficients a sont donnés, à l'exception du premier, par la formule

$$(49) \qquad a_m = (-1)^m \left(\frac{C_{2m}}{4} - C_{2m-2} \right).$$

36. Remarquons tout d'abord que la série $\Psi(t)$ peut être remplacée, à un facteur fini [1] près, par son premier terme $e^{-\pi t}$. On peut également faire abstraction du facteur $t^{-\frac{3}{4}}$ qui est plus petit que 1.

D'ailleurs, si ε est un nombre positif, mais aussi petit qu'on le voudra, l'inégalité

$$(\log t)^m < e^{\varepsilon t}$$

ou

$$(50) \qquad \log t < e^{\frac{\varepsilon t}{m}}$$

est vérifiée à partir de la valeur $t = m^{1+\varepsilon}$, du moins pour les grandes valeurs de m; car on a bien, pour m suffisamment grand,

$$(1+\varepsilon) \log m < e^{\varepsilon m^\varepsilon}$$

---

[1] Ce facteur est même très voisin de 1. Il est inférieur à

$$1 + \frac{e^{-3\pi}}{1 - e^{-3\pi}} < 1 + \frac{1}{10000}.$$

et de plus, en prenant les dérivées des deux membres de l'inégalité (50), on trouve

$$\frac{1}{t} < \frac{\varepsilon}{m} e^{\frac{\varepsilon t}{m}},$$

inégalité dont le premier membre est décroissant tandis que le second est croissant et qui est vérifiée pour $t = m^{1+\varepsilon}$, si m est suffisamment grand.

Si donc, dans la formule (47), nous décomposons l'intégrale qui multiplie $\frac{1}{2^m m!}$ en deux, l'une prise entre les limites 1 et $m^{1+\varepsilon}$, l'autre entre $m^{1+\varepsilon}$ et $+\infty$, la seconde sera moindre que $\frac{e^{-(\pi-\varepsilon)m^{1+\varepsilon}}}{\pi-\varepsilon}$, c'est-à-dire infiniment petite pour m infini.

La première sera manifestement inférieure à

$$C_0(1+\varepsilon)^m(\log m)^m,$$

où C_0 est l'intégrale $\int_1^\infty e^{-\pi t} t^{-\frac{3}{2}} dt$.

C_m sera donc au plus de l'ordre de $\left(\frac{1+\varepsilon}{2}\right)^m \frac{(\log m)^m}{m!}$, ce qui donne

$$|a_m| < \left(\frac{1+\varepsilon}{2}\right)^{2m} \frac{(\log 2m)^{2m}}{(2m)!}.$$

Il faut donc prendre [1]

$$\varphi(m) = \left(\frac{2}{1+\varepsilon}\frac{2m}{e\log m}\right)^2.$$

D'après ce qui précède, cette formule exprime également la loi de croissance des racines de l'équation $\xi(x) = 0$, considérée comme équation en x^2.

Si l'on considère x comme l'inconnue de l'équation, il faut prendre

---

[1] La fonction $\varphi(m)$ ainsi définie satisfait manifestement aux conditions indiquées au n° 27.

la racine carrée de l'expression précédente et l'on trouve

$$(51) \qquad \rho_p > \frac{kp}{\log p},$$

en posant

$$(52) \qquad k = \frac{1-\varepsilon}{e}.$$

57. Si nous voulions avoir une limite supérieure des modules des racines successives, il faudrait commencer par trouver une limite inférieure du module de a_m. Or on aura une limite inférieure de C_m en prenant l'intégrale entre les limites $m^{1-\varepsilon}$ et $m^{1-\varepsilon'}$ (où ε et $\varepsilon' < \varepsilon$ sont deux nombres positifs très petits. On trouve ainsi

$$C_m > \frac{(1-\varepsilon)^m (\log m)^m e^{-\pi m^{1-\varepsilon}} m^{-\frac{3}{4}(1-\varepsilon')}}{2^m m!} (m^{1-\varepsilon'} - m^{1-\varepsilon}),$$

ce qui peut s'écrire

$$C_m > \frac{(1-\varepsilon)^m (\log m)^m}{2^m m!},$$

en réunissant tous les facteurs de la forme $(1-\varepsilon)^m$.

D'ailleurs le rapport $\frac{C_m}{C_{m-2}}$ tend vers zéro; car dans l'évaluation de ce rapport on peut, d'après ce que nous avons vu, considérer l'intégrale prise seulement jusqu'à la limite $t = m^{1+\varepsilon}$, et il vient alors

$$C_m < C_{m-2} \frac{(1+\varepsilon)^2 \log^2 m}{4m(m-1)}.$$

Il en résulte que $|a_m|$ est, à un facteur constant près, supérieur à C_{2m-2} ou à $\frac{(1-\varepsilon)^{2m}(\log m)^{2m}}{2^{2m}(2m)!}$.

Nous pourrons alors appliquer les raisonnements des n^{os} **19-20** en prenant $\varphi(p) = \left(\frac{k'p}{\log p}\right)^2$, où k' est une constante indéterminée. On a

ici $\alpha = 2 - \varepsilon$, et l'on trouve

$$|a_m| < \left[\frac{(2e+\varepsilon)\log m}{k' m}\right]^{2m}.$$

En appliquant la réduction indiquée dans la note 1 (p. 21), on obtient une limite un peu moins élevée

$$|a_m| < \left[\frac{(1,88+\varepsilon)\, e \log m}{k' m}\right]^{2m}.$$

Si l'on compare cette valeur à celle qui vient d'être trouvée pour a_m, il vient

$$k' = 7,56\ldots$$

Telle est la quantité que $\frac{\rho_p \log p}{p}$ ne saurait dépasser constamment, lorsque p grandit indéfiniment.

Les conclusions auxquelles nous arrivons sont donc les suivantes :

Le rapport $\frac{1}{\rho_p}\frac{p}{\log p}$ *reste fini et sa limite supérieure, pour* p *infini, est comprise entre* $\frac{1}{7,56}$ *et* $\frac{e}{4}$.

Riemann donne, entre un module ρ et le nombre p des racines de module plus petit que ρ, la relation approchée

$$p = \frac{\rho}{2\pi}\left(\log\frac{\rho}{2\pi} - 1\right). \tag{53}$$

Pour comparer ce résultat à ceux que nous venons d'obtenir, il faut résoudre cette équation par rapport à ρ, ce qui se fait aisément par la méthode des approximations successives. On trouve ainsi comme valeur approchée

$$\rho = \frac{2\pi p}{\log p},$$

de sorte que le rapport $\frac{1}{\rho}\frac{p}{\log p}$ devrait tendre vers $\frac{1}{2\pi}$. Cette valeur

est comprise entre les deux limites précédemment indiquées, de sorte que nous ne sommes pas à même de décider si le coefficient $\frac{1}{2\pi}$ de la formule (53) est exact ou non.

58. Mais, ainsi que nous l'avons dit plus haut, ce point n'est pas celui sur lequel repose le raisonnement de Riemann. C'est la détermination du genre de $\xi(x)$ qui constitue la question essentielle et les recherches qui précèdent en donnent immédiatement la solution.

Nous avons, en effet, constaté que, en considérant toujours $\xi(x)$ comme fonction de x^2, son développement satisfait à la condition (8) avec $\alpha = 2 - \varepsilon$, et, par conséquent, $\lambda = \frac{1}{2} + \varepsilon$.

Dès lors, les conclusions du n° **55** nous permettent d'affirmer la proposition suivante :

La fonction $\xi(x)$ (considérée comme fonction de x^2) est de genre zéro.

Elle s'exprime par le produit de facteurs primaires et d'une simple constante, sans aucun facteur exponentiel.

C'est le résultat que nous nous proposions d'établir.

Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude de certaines équations différentielles ordinaires;

PAR M. ÉMILE PICARD.

Dans le cinquième Chapitre d'un Mémoire sur les équations aux dérivées partielles [1], j'ai rapidement indiqué comment certaines méthodes d'approximations successives pouvaient être employées dans l'étude de quelques équations différentielles ordinaires. Il m'a paru intéressant d'appliquer les mêmes principes à l'étude de quelques autres classes d'équations différentielles; c'est ce que je me propose de faire dans ce Mémoire. Les méthodes d'approximation dont nous faisons usage sont théoriquement susceptibles de s'appliquer à toute équation, mais elles ne deviennent vraiment intéressantes *pour l'étude des propriétés des fonctions définies par les équations différentielles* que si l'on ne reste pas dans les généralités et si l'on envisage certaines classes d'équations. Le champ où l'approximation converge est alors susceptible d'être agrandi; on verra même des exemples où les approximations seront convergentes pour toute valeur réelle de la variable indépendante. Bien des précautions d'ailleurs sont à prendre dans ces questions délicates; par cela même que les approximations convergent, on n'est pas assuré qu'elles convergent vers le système cherché d'intégrales dont on fait l'étude.

[1] *Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives* (*Journal de Mathématiques*, 1890).

La plus grande partie de ce travail est consacrée à une méthode d'approximations permettant d'obtenir les intégrales d'un système de n équations du second ordre, ces intégrales ayant des valeurs données pour deux valeurs de la variable. Pour des classes assez étendues d'équations, le champ d'application de la méthode est beaucoup plus étendu qu'on pourrait le croire tout d'abord; il est même des équations pour lesquelles on peut ainsi faire l'étude complète des intégrales. Parmi les applications, je citerai la démonstration, pour certaines équations, de solutions périodiques. On pourrait étendre ces applications; je n'ai voulu indiquer, dans ce travail, que quelques exemples, afin de ne pas rester uniquement dans les généralités. Je compte revenir plus tard sur quelques problèmes de Mécanique qui me paraissent pouvoir être traités par cette voie [1].

CHAPITRE I.

GÉNÉRALITÉS.

I. — Première méthode d'approximations.

1. Je ne ferai que rappeler la première méthode d'approximations que j'ai développée ailleurs en détail (*voir*, en particulier, le second Volume de mon *Traité d'Analyse*, p. 301). Considérons le système d'équations

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_m),$$

$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_m),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{dy_m}{dx} = f_m(x, y_1, y_2, \ldots, y_m).$$

[1] J'ai donné un résumé de ce Mémoire (*Comptes rendus*, t. CXV, p. 543).

On suppose que les fonctions f soient définies, x restant dans l'intervalle $(x^0 - a, x^0 + a)$ et y_i restant dans l'intervalle $(y_i^0 - b, y_i^0 + b)$ pour $i = 1, 2, \ldots, m$, et soit M la valeur absolue maxima des fonctions dans ces intervalles.

De plus, les fonctions f sont telles que

$$\begin{aligned}&|f_i(x, y'_1, y'_2, \ldots, y'_m) - f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_m)| \\ &\quad < \alpha|y'_1 - y_1| + \beta|y'_2 - y_2| + \ldots + \lambda|y'_m - y_m|,\end{aligned}$$

$\alpha, \ldots, \lambda$ étant des constantes positives.

Dans ces conditions, nous obtenons un système d'intégrales prenant pour x^0 les valeurs $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0$ et déterminées dans l'intervalle $(x_0 - h, x_0 + h)$, en désignant par h la plus petite des trois quantités

$$(\alpha) \qquad a, \quad \frac{b}{M}, \quad \frac{1}{\alpha + \beta + \ldots + \lambda}.$$

2. On peut, du résultat précédent, déduire une conséquence applicable à une classe très étendue d'équations. Reprenant le système précédent, nous admettons maintenant que les fonctions f soient finies et bien déterminées quand x reste dans un certain domaine I, et quand $y_1, y_2, \ldots, y_m$ varient entre $-\infty$ et $+\infty$. De plus, *les dérivées partielles du premier ordre*

$$\frac{\partial f_i}{\partial y_k} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, m)$$

restent, je le suppose, toujours moindres en valeur absolue qu'un nombre fixe N, *quand x reste dans* I *et que les y varient entre* $-\infty$ *et* $+\infty$.

On pourra prendre ici pour valeur de $\alpha, \ldots, \lambda$ le nombre N. D'autre part, dans la détermination du nombre h du paragraphe précédent, nous n'avons pas ici à considérer les deux premiers termes de la suite (α), car nous les avions seulement introduits pour que les y_i calculés dans les diverses approximations restent entre $y_i^0 - b$ et $y_i^0 + b$, ce qui est inutile ici puisque le champ des y est illimité. Nous

pouvons donc prendre

$$h = \frac{1}{mN};$$

h est donc un nombre fixe. Ce résultat important montre que nous pourrons toujours étendre notre système d'intégrales de proche en proche dans tout le domaine de I.

Ainsi, tout système d'intégrales prenant pour x^0 les valeurs finies $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0$ *reste certainement fini et bien déterminé dans tout l'intervalle* I.

Ce résultat, quoique très simple, présente peut-être quelque intérêt, car il est en général impossible de savoir ce que deviennent les intégrales en dehors d'un champ très limité. En particulier, si l'intervalle I contient tout l'intervalle $(-\infty, +\infty)$, les intégrales resteront *toujours finies.*

Pour citer un exemple, prenons l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = P(x)y + Q(x)\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Si l'on suppose que $P(x)$ et $Q(x)$ restent, x allant de $-\infty$ à $+\infty$, toujours moindres qu'un nombre fixe, on peut affirmer que *toutes* les intégrales de cette équation seront déterminées et resteront finies pour l'ensemble des valeurs réelles de x. L'équation précédente est, en effet, équivalente au système

$$\frac{dy}{dx} = y',$$

$$\frac{dy'}{dx} = P(x)y + Q(x)\frac{y}{\sqrt{1+y^2}},$$

et les dérivées partielles des seconds membres de ces équations par rapport à y et à y' restent moindres qu'un nombre fixe.

5. Le champ de convergence de la série obtenue au moyen de la méthode générale rappelée au n° **1** est, en général, assez limité. Il y a cependant des cas de quelque étendue où le champ de convergence sera beaucoup plus étendu. Nous allons citer quelques exemples.

Prenons les équations (je me borne à deux équations uniquement pour simplifier)

$$(\mathrm{E})\qquad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y, z), \\ \dfrac{dz}{dx} = \varphi(x, y, z). \end{cases}$$

Nous n'allons considérer les fonctions f et φ que pour des valeurs positives de y et z.

Supposons qu'elles soient positives, quel que soit x, et *croissent* avec y et z. De plus les dérivées partielles du premier ordre de f par rapport à y et z, nécessairement positives, vont en *décroissant* quand y ou z augmente.

Il est clair d'abord que, dans ces conditions, les dérivées partielles du premier ordre de f resteront toujours moindres qu'un nombre fixe et, par suite, le système (E) appartiendra au type étudié dans le paragraphe précédent.

En supposant que

$$f(x, 0, 0) \quad \text{et} \quad \varphi(x, 0, 0)$$

ne soient pas tous deux nuls identiquement, nous avons un système d'intégrales y et z des équations (E), s'annulant pour une certaine valeur de x, soit $x = 0$. Nous pourrons suivre ces intégrales de proche en proche ; elles seront toujours positives et bien définies pour toute valeur positive de x, d'après ce qui a été dit (n° **2**).

Nous allons montrer qu'*un même développement représentera ces intégrales pour toute valeur positive de x.*

Les approximations successives, faites en partant de $y_0 = z_0 = 0$, nous donnent une suite de fonctions positives

$$\begin{array}{ll} y_0 = 0, & z_0 = 0, \\ y_1, & z_1, \\ y_2, & z_2, \\ \ldots, & \ldots, \\ y_n, & z_n, \end{array}$$

et l'on aura évidemment

$$y_1 < y_2 < \ldots < y_n < \ldots,$$
$$z_1 < z_2 < \ldots < z_n < \ldots.$$

Établissons que les approximations successives convergeront pour toute valeur positive de x. Reprenons, à cet effet, les deux intégrales y et z du système (E) s'annulant pour $x = 0$. Des équations (E) et des équations

$$\frac{dy_1}{dx} = f(x, 0, 0),$$

$$\frac{dz_1}{dx} = \varphi(x, 0, 0),$$

on conclut

$$y > y_1, \qquad z > z_1,$$

et, de même, d'une manière générale, quel que soit n,

$$y > y_n, \qquad z > z_n.$$

Il est donc manifeste que y_n et z_n auront des limites : il faut montrer que ces limites sont respectivement y et z.

Considérons, à cet effet, un intervalle fini, d'ailleurs quelconque $(0, a)$, et les quotients

$$\frac{y - y_1}{y}, \quad \frac{z - z_1}{z}.$$

Ces quotients sont des fonctions de x, plus petites que l'unité, et, quand x varie entre 0 et a, il y a pour elles un maximum q plus petit que l'unité. Il ne pourrait y avoir de difficulté à ce sujet que pour $x = 0$. Or, pour $x = 0$, l'expression

$$1 - \frac{y_1}{y}$$

tend vers zéro, puisque

$$\lim \frac{y_1}{y} = \lim \frac{\frac{dy_1}{dx}}{\frac{dy}{dx}} = \lim_{x=0} \frac{f(x, 0, 0)}{f(x, y, z)} = 1,$$

en supposant que $f(0, 0, 0)$ et $\varphi(0, 0, 0)$ ne soient pas nuls. Nous avons donc entre 0 et a

$$\frac{y - y_1}{y} < q, \qquad \frac{z - z_1}{z} < q \qquad (q < 1).$$

Prenons maintenant les quotients

$$\frac{y - y_2}{y - y_1} \quad \text{et} \quad \frac{z - z_2}{z - z_1};$$

nous allons voir qu'ils sont aussi tous deux moindres que q. En effet,

$$\frac{d(y - y_1)}{dx} = f(x, y, z) - f(x, 0, 0),$$

$$\frac{d(y - y_2)}{dx} = f(x, y, z) - f(x, y_1, z_1).$$

Or, en n'écrivant plus x pour abréger, nous avons

$$\frac{f(y, z) - f(y_1, z_1)}{f(y, z) - f(0, 0)} = \frac{(y - y_1) f'_y(\eta_1, \zeta_1) + (z - z_1) f'_z(\eta_1, \zeta_1)}{y f'_y(\eta_0, \zeta_0) + z f'_z(\eta_0, \zeta_0)};$$

η_1 et ζ_1 sont respectivement compris entre y et y_1, puis z et z_1; de même, η_0 et ζ_0 sont respectivement compris entre 0 et y, puis entre 0 et z. De plus,

$$\eta_1 > \eta_0, \qquad \zeta_1 > \zeta_0.$$

Par suite

$$\frac{f'_y(\eta_1, \zeta_1)}{f'_y(\eta_0, \zeta_0)} < 1, \qquad \frac{f_z(\eta_1, \zeta_1)}{f'_z(\eta_0, \zeta_0)} < 1.$$

On en conclut de suite

$$\frac{f(y, z) - f(y_1, z_1)}{f(y, z) - f(0, 0)} < q,$$

et enfin, en revenant aux équations qui donnent les différences $y - y_1$ et $y - y_2$ et aux équations analogues en z

$$\frac{y - y_2}{y - y_1} < q, \qquad \frac{z - z_2}{z - z_1} < q.$$

En continuant ainsi de proche en proche, on a, d'une manière générale,

$$\frac{y-y_n}{y-y_{n-1}} < q, \qquad \frac{z-z_n}{z-z_{n-1}} < q.$$

Il en résulte

$$y-y_n < q^n \cdot y, \qquad z-z_n < q^n \cdot z$$

et, par suite,

$$\lim_{n=\infty} y_n = y, \qquad \lim_{n=\infty} z_n = z.$$

Comme a est quelconque, on voit que *les approximations successives convergeront nécessairement pour toute valeur positive de x.* Les fonctions y et z seront donc représentées par les développements toujours convergents pour x positif

$$y = y_1 + (y_2 - y_1) + \ldots + (y_n - y_{n-1}) + \ldots,$$
$$z = z_1 + (z_2 - z_1) + \ldots + (z_n - z_{n-1}) + \ldots.$$

Citons comme exemple, en prenant une seule équation,

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y + B(x)\frac{y}{\sqrt{1+y^2}} + C(x),$$

en désignant par $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ les fonctions de x positives pour $x > 0$, les deux premières restant inférieures à un nombre fixe.

4. Reprenons maintenant les équations (E), en ne faisant aucune hypothèse sur les dérivées du premier ordre des f et des φ, si ce n'est qu'elles restent comprises entre deux limites fixes. Les équations appartiennent toujours au type du n° **2**, et nous sommes assuré qu'il existe un système d'intégrales y et z parfaitement déterminées pour toute valeur positive de x, et s'annulant pour $x = 0$. Il est évident que y et z iront constamment en croissant.

Que pouvons-nous dire des approximations successives? On verra, comme plus haut,

$$y_1 < y_2 < \ldots < y_n < \ldots < y,$$
$$z_1 < z_2 < \ldots < z_n < \ldots < z.$$

Il en résulte que y_n et z_n auront nécessairement des limites Y et Z et nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} Y &= y_1 + (y_2 - y_1) + \ldots + (y_n - y_{n-1}) + \ldots, \\ Z &= z_1 + (z_2 - z_1) + \ldots + (z_n - z_{n-1}) + \ldots. \end{aligned}$$

Pour chaque valeur de x, ces séries sont convergentes, mais *nous ne pouvons pas démontrer ici que* $Y = y$, $Z = z$.

Cette égalité a lieu quand x est assez petit : c'est le théorème général. Si l'on admet que les deux séries qui représentent Y et Z sont *uniformément* convergentes dans un certain intervalle $(0, a)$, on peut établir que Y et Z coïncident respectivement avec y et z. Prenons, en effet, la série des dérivées

$$(\Sigma) \qquad \frac{dy_1}{dx} + \frac{d(y_2 - y_1)}{dx} + \ldots + \frac{d(y_n - y_{n-1})}{dx} + \ldots.$$

Elle peut s'écrire

$$\begin{aligned} &f(x, y_0, z_0) + [f(x, y_1, z_1) - f(x, y_0, z_0)] + \ldots \\ &\qquad + [f(x, y_{n-1}, z_{n-1}) - f(x, y_{n-2}, z_{n-2})] + \ldots. \end{aligned}$$

La somme des $n + 1$ premiers termes de cette série est égale à

$$f(x, y_n, z_n).$$

Elle est donc convergente et a pour somme $f(x, Y, Z)$; elle est uniformément convergente si y_n et z_n tendent uniformément, comme nous l'admettons, vers leur limite, quand x est compris dans l'intervalle $(0, a)$. La série (Σ) peut donc être intégrée, ou, en d'autres termes,

$$\frac{dY}{dx} = f(x, Y, Z)$$

et, de la même manière,

$$\frac{dZ}{dx} = \varphi(x, Y, Z).$$

Les deux fonctions Y et Z satisfont donc aux équations différen-

tielles et, comme elles s'annulent pour $x = 0$, on a nécessairement

$$Y = y, \qquad Z = z.$$

5. Des circonstances plus curieuses encore vont se présenter dans le cas où les fonctions f et φ, toujours positives, sont décroissantes avec y et z. Les approximations successives, faites en partant de $y_0 = z_0 = 0$, donnent une suite de fonctions positives de x

$$\begin{array}{ll} y_0 = 0, & z_0 = 0, \\ y_1, & z_1, \\ y_2, & z_2, \\ \ldots, & \ldots, \\ y_n, & z_n. \end{array}$$

On a d'abord

$$y_1 = \int_0^x f(x, 0, 0)\,dx, \qquad z_1 = \int_0^x \varphi(x, 0, 0)\,dx$$

et ensuite

$$y_2 = \int_0^x f(x_1, y_1, z)\,dx, \qquad z_2 = \int_0^x \varphi(x_1, y_1, z)\,dx.$$

Il en résulte

$$y_2 < y_1, \qquad z_2 < z_1.$$

Si nous prenons alors la valeur de y_3 et z_3, on aura, d'après les hypothèses faites,

$$y_1 > y_3 > y_2, \qquad z_1 > z_3 > z_2.$$

Il en résulte que les y à indices pairs forment une suite croissante, et les y à indices impairs forment une suite décroissante; tout terme de la seconde suite est plus grand que tout terme de la première. Nous sommes donc assuré que les termes d'indice impair

$$y_1, \quad y_3, \quad y_5, \quad \ldots$$

ont une limite que nous désignerons par Y, et de même les termes d'indice pair

$$y_2, \quad y_4, \quad y_6, \quad \ldots$$

ont une limite que nous appellerons y.

Il est certain, d'après le théorème fondamental, que y et Y sont identiques quand x est suffisamment petit.

Si les deux suites précédentes convergent uniformément vers leurs limites quand x est dans un intervalle $(0, a)$, il est facile d'établir que les deux limites sont égales. Prenons, en effet,

$$\begin{aligned} Y &= y_1 + (y_3 - y_1) + \ldots + (y_{2n+1} - y_{2n-1}) + \ldots, \\ y &= y_2 + (y_4 - y_2) + \ldots + (y_{2n} - y_{2n-2}) + \ldots. \end{aligned}$$

D'après notre hypothèse, ces deux séries sont uniformément convergentes dans l'intervalle $(0, a)$. Nous allons en conclure que les deux fonctions de x, ainsi représentées, ont des dérivées. Prenons, en effet, la série des dérivées

$$\frac{dy_2}{dx} + \frac{d(y_4 - y_2)}{dx} + \ldots + \frac{d(y_{2n} - y_{2n-2})}{dx} + \ldots,$$

qui se réduit à

$$\begin{aligned} f(x, y_1, z_1) &+ [f(x, y_3, z_3) - f(x, y_1, z_1)] + \ldots \\ &+ [f(x, y_{2n-1}, z_{2n-1}) - f(x, y_{2n-3}, z_{2n-3})] + \ldots. \end{aligned}$$

La somme des n premiers termes de cette série est

$$f(x, y_{2n-1}, z_{2n-1}).$$

Elle a pour limite

$$f(x, Y, Z),$$

et elle sera uniformément convergente dans l'intervalle $(0, a)$, puisque y_{2n-1} et z_{2n-1} tendent uniformément vers leur limite. On en conclut

que y a une dérivée et que

$$\frac{dy}{dx} = f(x, Y, Z),$$

et, pareillement,

$$\frac{dz}{dx} = \varphi(x, Y, Z).$$

De la même manière, on aura

$$\frac{dY}{dx} = f(x, y, z),$$

$$\frac{dZ}{dx} = \varphi(x, y, z).$$

Par conséquent, nous avons quatre équations auxquelles satisfont les fonctions

$$y, \quad z, \quad Y, \quad Z.$$

Or, pour $x = 0$,

$$y = z = Y = Z = 0,$$

et l'on en conclut de suite, à cause de la symétrie,

$$y = Y, \qquad z = Z.$$

Il est bien probable qu'en général les limites (y, z) et (Y, Z) seront distinctes quand l'intervalle sera suffisamment grand, ce qui tiendra, d'après ce qui précède, à la convergence *non uniforme* des deux suites vers leur limite; il serait désirable d'avoir un exemple explicite où les limites seraient différentes.

II. — Seconde méthode d'approximations.

6. Prenons d'abord l'unique équation

$$(1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right).$$

Nous voulons trouver l'intégrale de cette équation, qui prend pour $x = a$ la valeur A *et pour $x = b$ la valeur* B. On suppose que la fonction

$$f(x, y, y')$$

est définie et continue quand x varie dans un certain intervalle de longueur h comprenant a et b, et que $|y|$ et $|y'|$ varient respectivement entre $-$ L et $+$ L d'une part, $-$ L′ et $+$ L′ d'autre part; nous désignerons par M le module maximum de f dans ces conditions. On admet de plus que

$$|f(x, y_1, y'_1) - f(x, y, y')| < \alpha|y - y_1| + \beta|y' - y'_1|.$$

α et β étant deux constantes positives fixes, les y et y' restant entre les limites indiquées.

On part d'une fonction quelconque y_0 satisfaisant aux conditions précédentes, et l'on forme les équations successives

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d^2y_1}{dx^2} = f\left(x, y_0, \dfrac{dy_0}{dx}\right), \\ \dfrac{d^2y_2}{dx^2} = f\left(x, y_1, \dfrac{dy_1}{dx}\right), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \dfrac{d^2y_n}{dx^2} = f\left(x, y_{n-1}, \dfrac{dy_{n-1}}{dx}\right). \end{array}\right.$$

On intègre chaque fois par la condition que $y_1, y_2, \ldots, y_n$ prennent les valeurs initiale et finale données.

Pour simplifier l'écriture, nous supposerons, comme il est évidemment permis, que

$$a = \mathrm{A} = 0 \qquad \text{et} \qquad b > 0.$$

Il s'agit d'abord de savoir si les y successifs restent, ainsi que leurs dérivées premières, entre les limites indiquées.

7. Arrêtons-nous un moment sur l'équation

$$(3)\qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \varphi(x),$$

on aura l'intégrale s'annulant pour $x = 0$,

$$\int_0^x \varphi(z)(x-z)\,dz + \mathrm{P}x.$$

Choisissons la constante P de telle sorte que cette expression prenne la valeur B pour $x = b$; on a ainsi

$$y = \int_0^x \varphi(z)(x-z)\,dz + \frac{\mathrm{B}x}{b} - \frac{x}{b}\int_0^b \varphi(z)(b-z)\,dz,$$

qui représente l'intégrale de (3) s'annulant pour $x = 0$ et prenant la valeur B pour $x = b$. On peut trouver une limite supérieure de $|y|$ et $\left|\frac{dy}{dx}\right|$ quand x varie entre 0 et b. Écrivons y sous la forme

$$\int_0^x z\varphi(z)\left(\frac{x}{b} - 1\right)dz - \frac{x}{b}\int_x^b \varphi(z)(b-z)\,dz + \frac{\mathrm{B}x}{b}.$$

La valeur absolue de la première intégrale, en désignant par M la valeur absolue maxima de $\varphi(x)$, est moindre que

$$\left(1 - \frac{x}{b}\right)\frac{\mathrm{M}b^2}{2}.$$

La valeur absolue de la seconde est moindre que

$$\frac{x}{b}\,\frac{\mathrm{M}(b-x)^2}{2}.$$

On a donc, par conséquent,

$$|y| < \left(1 - \frac{x}{b}\right)\frac{\mathrm{M}b^2}{2} + \frac{x}{b}\,\frac{\mathrm{M}(b-x)^2}{2} + |\mathrm{B}|,$$

d'où, enfin,

$$|y| < \frac{\mathrm{M}b^2}{2} + |\mathrm{B}|.$$

Passons maintenant à $\frac{dy}{dx}$; on a

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(z)\,dz + \frac{B}{b} - \frac{1}{b}\int_0^b \varphi(z)(x-z)\,dz,$$

égalité qu'on peut écrire sous la forme

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(z)\left(1 - \frac{x-z}{b}\right)dz - \frac{1}{b}\int_x^b \varphi(z)(x-z)\,dz + \frac{B}{b};$$

on aura, par suite,

$$\left|\frac{dy}{dx}\right| < Mx + \frac{M}{b}\frac{(b-x)^2}{2} + \left|\frac{B}{b}\right|,$$

et, par suite,

$$\left|\frac{dy}{dx}\right| < Mb + \left|\frac{B}{b}\right|.$$

8. Revenons maintenant au système (2). Nous devons évidemment supposer

$$|B| < L.$$

Nous admettrons de plus que

$$\frac{Mb^2}{2} + |B| < L, \tag{4}$$

ce qui a lieu si b est assez petit. De plus, pour que $\frac{dy}{dx}$ soit certainement compris entre $-L'$ et $+L'$, nous faisons l'hypothèse que

$$Mb + \left|\frac{B}{b}\right| < L'. \tag{5}$$

Moyennant les inégalités (4) et (5), nous sommes assuré que les fonctions $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sont toutes comprises entre $-L$ et $+L$. On doit remarquer que ces inégalités seront certainement vérifiées si b, B et $\frac{B}{b}$ sont suffisamment petits.

Il nous faut maintenant montrer que y_n tend vers une limite quand n augmente indéfiniment. On a

$$\frac{d^2(y_2 - y_1)}{dx^2} = f\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}\right) - f\left(x, y_0, \frac{dy_0}{dx}\right).$$

Or, soit M le maximum de

$$\alpha\,|y_1 - y_0| + \beta\left|\frac{dy_1}{dx} - \frac{dy_0}{dx}\right|,$$

nous aurons, d'après le numéro précédent,

$$|y_2 - y_1| < \frac{Mb^2}{2},$$

$$\left|\frac{dy_2}{dx} - \frac{dy_1}{dx}\right| < Mb.$$

La relation

$$\frac{d^2(y_3 - y_2)}{dx^2} = f\left(x, y_2, \frac{dy_2}{dx}\right) - f\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}\right)$$

nous montre que

$$|y_3 - y_2| < M\left(\alpha\frac{b^2}{2} + \beta b\right)\frac{b^2}{2},$$

$$\left|\frac{dy_3}{dx} - \frac{dy_2}{dx}\right| < M\left(\alpha\frac{b^2}{2} + \beta b\right)b,$$

et, de proche en proche, on arrive aux inégalités

$$|y_n - y_{n-1}| < M\left(\alpha\frac{b^2}{2} + \beta b\right)^{n-2}\frac{b^2}{2},$$

$$\left|\frac{dy_n}{dx} - \frac{dy_{n-1}}{dx}\right| < M\left(\alpha\frac{b^2}{2} + \beta b\right)^{n-2} b.$$

Si donc on a

$$(6) \qquad \alpha\frac{b^2}{2} + \beta b < 1,$$

la série

$$y_1 + (y_2 - y_1) + \ldots + (y_n - y_{n-1}) + \ldots$$

sera manifestement convergente, et, par suite, y_n aura une limite y pour $n = \infty$. Cette fonction y de x aura certainement une dérivée première représentée par la série

$$\frac{dy_1}{dx} + \left(\frac{dy_2}{dx} - \frac{dy_1}{dx}\right) + \ldots + \left(\frac{dy_n}{dx} - \frac{dy_{n-1}}{dx}\right) + \ldots.$$

Il est aisé de vérifier que y satisfait à l'équation (1); on a, en effet,

$$y_n = \int_0^x f\left(z, y_{n-1}, \frac{dy_{n-1}}{dz}\right)(x - z)\,dz$$
$$+ \frac{Bx}{b} - \frac{x}{b}\int_0^b f\left(z, y_{n-1}, \frac{dy_{n-1}}{dz}\right)(b - z)\,dz,$$

en remplaçant, sous les signes d'intégration, dans y_{n-1}, la lettre x par la lettre z. Puisque y_n et $\frac{dy_n}{dz}$ convergent *uniformément* vers leurs limites respectives y et $\frac{dy}{dx}$, on aura

$$y = \int_0^x f\left(z, y, \frac{dy}{dz}\right)(x - z)\,dz + \frac{Bx}{b} - \frac{x}{b}\int_0^b f\left(z, y, \frac{dy}{dz}\right)(b - z)\,dz$$

et, par suite, en différentiant deux fois

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right).$$

Il est évident, d'ailleurs, que $y = 0$ pour $x = 0$, et $y = B$ pour $x = b$.

La recherche de l'intégrale est donc complètement effectuée; on ne doit pas oublier que les inégalités (4), (5) et (6) sont supposées vérifiées.

9. L'analyse précédente peut s'étendre à un nombre quelconque d'équations de la forme

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = f_1\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_m, \frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{dy_m}{dx}\right),$$
$$\frac{d^2y_2}{dx^2} = f_2\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_m, \frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{dy_m}{dx}\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{d^2y_m}{dx^2} = f_m\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_m, \frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{dy_m}{dx}\right).$$

Notre méthode d'approximations successives permettra de déterminer les intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_m$ de ce système, telles qu'on ait

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_m = 0 \qquad (\text{pour } x = 0),$$
$$y_1 = B_1, \qquad y_2 = B_2, \qquad \ldots, \qquad y_m = B_m \qquad (\text{pour } x = b).$$

Certaines inégalités analogues aux inégalités (4), (5) et (6) devront être vérifiées. On suppose, d'ailleurs, que

$$|f_i(x, y_1, \ldots, y_m, y'_1, \ldots, y'_m) - f_i(x, z_1, \ldots, z_m, z'_1, \ldots, z'_m)|$$
$$< \alpha_1 |y_1 - z_1| + \ldots + \alpha_m |y_m - z_m| + \beta_1 |y'_1 - z'_1| + \ldots + \beta_m |y'_m - z'_m|.$$

En gardant pour le reste les mêmes notations que plus haut, on devra avoir

$$\frac{M b^2}{2} + |B_i| < L,$$
$$M b + \left|\frac{B_i}{b}\right| < L',$$

et enfin

$$(\alpha_1 + \ldots + \alpha_m)\frac{b^2}{2} + (\beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_m) b < 1.$$

10. Je dis maintenant que l'*intégrale déterminée par la méthode précédente est unique*, c'est-à-dire qu'il n'existe qu'un seul système d'intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_m$ prenant les valeurs données au commencement et à la fin de l'intervalle $(0, b)$. Bien entendu, nous ne pouvons considérer que des systèmes d'intégrales telles que

$$|y_i| < L, \qquad |y'_i| < L',$$

puisque c'est seulement dans un tel intervalle que nous supposons les f définies.

D'ailleurs, pour abréger, je supposerai que les fonctions f ont des dérivées partielles du premier ordre par rapport aux y, de telle sorte que α_k sera le maximum de

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial y_k}\right| \qquad (i = 1, 2, \ldots, m);$$

pareillement β_k sera le maximum de

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial y'_k}\right| \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

quand x varie entre o et b, les y entre $-L$ et $+L$ et les y' entre $-L'$ et $+L'$.

Supposons maintenant que nous ayons deux systèmes d'intégrales satisfaisant aux mêmes conditions aux limites

$$y_1, y_2, \ldots, y_m \quad \text{et} \quad Y_1, Y_2, \ldots, Y_m.$$

On aura, en retranchant les équations différentielles, posant

$$y_i - Y_i = u_i$$

et appliquant le théorème des accroissements finis

$$(E)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2 u_1}{dx^2} = a_{11} u_1 + a_{12} u_2 + \ldots + a_{1,m} u_m + b_{11} \dfrac{du_1}{dx} + \ldots + b_{1,m} \dfrac{du_m}{dx}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{d^2 u_m}{dx^2} = a_{m,1} u_1 + a_{m,2} u_2 + \ldots + a_{m,m} u_m + b_{m,1} \dfrac{du_1}{dx} + \ldots + b_{m,m} \dfrac{du_m}{dx}. \end{cases}$$

Nous pouvons considérer les a et b comme des fonctions de x, et nous avons alors un système d'équations linéaires et homogènes, pour lesquelles un système d'intégrales

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_m$$

s'annulent pour $x = 0$ et pour $x = b$.

Nous allons voir que les u doivent être identiquement nulles. De ce que

$$|a_{i,k}| < \alpha_k \qquad \text{et} \qquad |b_{i,k}| < \beta_k \qquad (i = 1, 2, \ldots m),$$

on conclut que, pour le système (E) d'équations linéaires, la méthode des approximations successives est applicable. Il en résulte que l'on peut trouver $2m$ systèmes d'intégrales prenant pour $x = 0$ et $x = b$

des valeurs arbitrairement données. Avec ces $2m$ systèmes d'intégrales, nous pouvons former l'intégrale générale de (E) et déterminer les constantes de façon à avoir les intégrales s'annulant toutes pour $x = 0$ et pour $x = b$. Or ces constantes seront toutes nulles, puisqu'elles sont données par des équations homogènes du premier degré, dont le déterminant n'est pas nul, toutes les lettres qui forment ce déterminant ayant des valeurs arbitraires. Les u sont donc identiquement nulles, et l'on a bien

$$Y_1 = y_1, \quad \ldots, \quad Y_m = y_m,$$

comme nous voulions l'établir.

CHAPITRE II.

III. — Examen d'une forme particulière d'équations.

11. Examinons quelques cas particuliers, où la forme spéciale des équations nous permettra diverses remarques sur la solution dont nous nous sommes occupé au n° **6**.

Prenons d'abord l'équation très simple

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y).$$

Nous avons montré [1] que, si la fonction f croît toujours en même temps que y, *il ne pourra y avoir deux intégrales de cette équation, continues dans l'intervalle* (a, b) *et prenant les valeurs* A *et* B *aux deux extrémités*.

---

[1] Chapitre V, n° 3, du Mémoire cité.

Nous avons ensuite fait voir comment la méthode alternée pouvait être appliquée à l'équation précédente. Je ne veux pas revenir sur ces questions, et c'est d'une équation de même forme, mais avec des hypothèses différentes, que je veux m'occuper maintenant.

Écrivons l'équation sous la forme

$$(7) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + f(x, y) = 0,$$

et supposons que, x étant dans un certain intervalle, la fonction $f(x, y)$, définie pour toute valeur de y, *croisse constamment avec y et que l'on ait identiquement*

$$f(x, 0) = 0.$$

Il est clair que, dans ces conditions, $f(x, y)$ sera positif quand y sera lui-même positif. Nous allons supposer de plus que la dérivée toujours positive

$$f'_y(x, y)$$

décroît quand y augmente.

Ces hypothèses faites, admettons qu'il existe une intégrale y de l'équation (7), restant toujours positive (et non nulle) lorsque x varie entre 0 et b, et ne s'annulant pas pour les valeurs extrêmes. Nous allons montrer que cette intégrale peut certainement être obtenue par la méthode des approximations successives.

Partons à cet effet de la fonction y_0 satisfaisant à l'équation

$$\frac{d^2y_0}{dx^2} = 0$$

et prenant aux limites les mêmes valeurs que y. Les équations successives

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2y_1}{dx^2} + f(x, y_0) = 0,\\
&\frac{d^2y_2}{dx^2} + f(x, y_1) = 0,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&\frac{d^2y_n}{dx^2} + f(x, y_{n-1}) = 0
\end{aligned}$$

(y_n prenant les mêmes valeurs que y aux deux limites) montrent que

$$y_0 < y_1 < \ldots < y_n.$$

Il faut montrer que y_n a y pour limite. Or considérons le quotient

$$\frac{y - y_0}{y}.$$

D'après l'équation

$$\frac{d^2(y - y_0)}{dx^2} + f(x, y) = 0,$$

y est plus grand que y_0, et, par suite, le rapport précédent est plus petit que l'unité et n'atteint pas ce nombre : soit q son maximum; on a

$$q < 1.$$

Ceci posé, l'équation

$$\frac{d^2(y - y_1)}{dx^2} + f(x, y) - f(x, y_0) = 0$$

donne, d'après le n° **7**,

$$(8) \quad \begin{cases} y - y_1 = \displaystyle\int_0^x z\,|f(z, y) - f(z, y_0)|\left[1 - \frac{x}{b}\right]dz \\ \qquad\qquad + \displaystyle\frac{x}{b}\int_x^b |f(z, y) - f(z, y_0)|\,(b - z)\,dz, \end{cases}$$

en remplaçant, sous les signes d'intégration, dans y et y_0, x par z.

Mais nous pouvons écrire l'inégalité

$$\frac{f(z, y) - f(z, y_1)}{f(z, y) - f(z, y_0)} = \frac{f'_y(z, \xi_1)(y - y_1)}{f'_y(z, \xi_0)(y - y_0)} < \frac{y - y_1}{y - y_0},$$

car $\xi_1 > \xi_0$. Or de l'égalité

$$y - y_0 = \int_0^x z f(z, y)\left(1 - \frac{x}{b}\right)dz + \frac{x}{b}\int_x^b f(z, y)(b - z)\,dz$$

rapprochée de l'égalité (8) et de l'inégalité

$$\frac{f(z, y) - f(z, y_0)}{f(z, y)} = \frac{f'_y(z, \zeta_1)(y - y_0)}{f'_y(z, \zeta_2)\, y} < \frac{y - y_0}{y} < q.$$

on conclut

$$\frac{y - y_1}{y - y_0} < q.$$

On aura de la même manière

$$\frac{y - y_2}{y - y_1} < q.$$

et ainsi indéfiniment

$$\frac{y - y_n}{y - y_{n-1}} < q.$$

De ces inégalités, on déduit

$$y - y_n < y\, q^{n+1}.$$

Cette inégalité établit bien que y_n converge uniformément vers y. C'est ce que nous voulions établir.

12. Nous avons maintenant à rechercher les intervalles dans lesquels on peut être assuré d'avoir une intégrale toujours positive, et chercher en particulier s'il est possible d'avoir une intégrale s'annulant aux extrémités d'un intervalle sans être identiquement nulle. Nous avons dit que la dérivée toujours positive

$$f'_y(x, y)$$

allait constamment en décroissant quand y augmente, lorsque x a une valeur fixe quelconque dans un certain intervalle. Pour $y = \infty$, cette fonction aura une valeur déterminée; posons

$$f'_y(x, 0) = P(x),$$
$$f'_y(x, \infty) = Q(x),$$

on aura

$$P(x) > Q(x),$$

$Q(x)$ pourrait être identiquement nulle.

13. Avant d'aller plus loin, rappelons un théorème bien connu sur les équations différentielles linéaires.

Étant donnée l'équation linéaire

$$(9) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + P(x)y = 0,$$

où la fonction $P(x)$ est positive et définie pour un champ suffisamment grand de valeurs de x, il existe une quantité α, telle que dans tout intervalle $(0, \alpha')$ où $\alpha < \alpha$, une intégrale nulle aux deux extrémités est identiquement nulle. Pour l'intervalle $(0, \alpha)$ au contraire, il existe une intégrale s'annulant aux deux extrémités et qui n'est pas nulle identiquement. Dans l'intervalle $(0, \alpha')$ la méthode des approximations successives conduit à une série convergente.

Si l'on considère une seconde équation de même forme

$$(10) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)y = 0,$$

à cette équation correspondra un intervalle $(0, \beta)$. Si l'on a

$$P(x) > Q(x),$$

on aura nécessairement

$$\alpha < \beta.$$

14. Ceci posé, revenons à l'équation

$$(E) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + f(x, y) = 0.$$

Proposons-nous de montrer qu'il existe une intégrale (ne s'annulant pas identiquement) s'annulant

$$\text{pour } x = 0 \qquad \text{et} \qquad \text{pour } x = a,$$

a étant compris entre α et β.

Cette intégrale va nous être fournie par la méthode des approximations successives. Nous partons d'une fonction arbitraire, toujours positive, s'annulant pour o et pour a; nous allons montrer d'abord que la série des approximations successives est convergente. Considérons à cet effet une quantité positive ε assez grande pour qu'en posant

$$f'_y(x, \varepsilon) = \mathrm{R}(x),$$

la quantité, analogue à la lettre α du numéro précédent et relative à l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \mathrm{R}(x)y = 0$$

soit supérieure à a; ceci est possible puisque pour $\varepsilon = \infty$ la fonction $\mathrm{R}(x)$ se réduit à $\mathrm{Q}(x)$.

Ceci posé, cherchons l'intégrale de l'équation (E) prenant pour $x = 0$ et pour $x = a$ la valeur ε. La méthode des approximations successives nous fournira une suite de fonctions croissantes

$$y_0 = \varepsilon, \qquad y_1, \quad y_2, \quad \ldots, \quad y_n, \quad \ldots.$$

Il est aisé de voir que cette suite a une limite. On a en effet

$$\frac{d^2(y_n - y_{n-1})}{dx^2} + f(x, y_{n-1}) - f(x, y_{n-2}) = 0.$$

Or

$$f(x, y_{n-1}) - f(x, y_{n-2}) < \mathrm{R}(x)(y_{n-1} - y_{n-2}),$$

puisque y_{n-1} et y_{n-2} sont supérieurs à ε. Or la série des approximations successives converge pour l'équation linéaire

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \mathrm{R}(x)y = 0.$$

Il en est donc *a fortiori* de même pour l'équation (E).

Nous venons de trouver l'intégrale de l'équation (E) prenant pour $x = 0$ et $x = a$ la valeur ε, ε étant une constante suffisamment grande. Nous voulons avoir l'intégrale de l'équation prenant la valeur zéro

aux deux extrémités. Or partons d'une fonction s'annulant aux deux extrémités et inférieure à ε; puisque les approximations convergent dans le cas qui vient d'être examiné ci-dessus, elles convergent nécessairement encore dans le cas actuel.

Nous obtenons donc, par la méthode des approximations successives, une intégrale s'annulant pour $x = 0$ et pour $x = a$. Une objection importante se présente toutefois immédiatement : l'intégrale que nous venons de trouver n'est-elle pas identiquement nulle?

Nous allons établir qu'il n'en est pas ainsi.

Montrons d'abord qu'on peut trouver une fonction continue y_0 de x, s'annulant pour $x = 0$ et pour $x = a$, et telle que dans l'intervalle $(0, a)$

$$\frac{d^2 y_0}{dx^2} + f(x, y_0) > 0.$$

Soit η une quantité positive, et posons

$$f'_y(x, \eta) = R_1(x).$$

Nous pouvons prendre η de telle sorte que la quantité α_1, correspondant à l'équation linéaire

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + R_1(x) y = 0,$$

soit égale à a. Désignons alors par y_0 la fonction continue satisfaisant à cette dernière équation entre 0 et a et s'annulant pour ces deux valeurs; de plus, comme elle n'est déterminée qu'à un facteur près, nous la prenons telle qu'elle ne dépasse pas η. Nous avons ainsi une fonction continue parfaitement définie, telle que

$$\frac{d^2 y_0}{dx^2} + f(x, y_0) > 0;$$

nous allons la prendre pour commencer les approximations successives. La seconde fonction y_1 est déterminée par l'équation

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + f(x, y_0) = 0$$

et par la condition de s'annuler pour $x = 0$ et pour $x = a$. Il est facile de voir que

$$y_1 > y_0.$$

Si nous écrivons, en effet, $y_1 = y_0 + \lambda$, nous aurons

$$\frac{d^2\lambda}{dx^2} + \frac{d^2 y_0}{dx^2} + f(x, y_0) = 0.$$

La somme des deux derniers termes est positive; λ s'annulant aux deux extrémités de l'intervalle $(0, a)$ sera donc positif dans cet intervalle. Nous aurons donc bien l'inégalité annoncée. Du moment que $y_1 > y_0$, on aura

$$y_2 > y_1$$

et ainsi de suite. L'intégrale cherchée y sera donc supérieure à y_0 : *elle ne sera pas identiquement nulle.*

En définitive, nous avons démontré dans ce paragraphe qu'*il existait une intégrale de l'équation*

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + f(x, y) = 0,$$

s'annulant pour $x = 0$ et pour $x = a$, et toujours positive dans cet intervalle.

15. *L'intégrale dont il vient d'être question est unique.* — Ceci est une conséquence de l'analyse du n° **11**. A la vérité, l'intégrale toujours positive y, que nous avons considérée dans ce numéro, ne s'annulait pas aux deux extrémités; le raisonnement subsiste sans modification si l'intégrale s'annule seulement à une des extrémités, soit pour $x = 0$ et si l'on suppose, de plus, que $\frac{dy}{dx}$ ne soit pas infinie pour $x = 0$. Il est évident d'ailleurs que $\frac{dy}{dx}$ ne sera pas nulle pour $x = 0$, car autrement y serait identiquement nulle. Si nous prenons alors le rapport

$$\frac{y - y_0}{y} = 1 - \frac{y_0}{y}$$

du n° **8**, ce rapport sera plus petit que l'unité même pour $x = 0$, car

$$\lim_{x=0}\left(\frac{y_0}{y}\right) = \frac{\operatorname{tang}\theta'}{\operatorname{tang}\theta},$$

θ et θ' désignant deux angles aigus différents de zéro et de $\frac{\pi}{2}$ et l'on a

$$\theta' \leqq \theta.$$

Si l'intégrale toujours positive y s'annule aux deux extrémités de l'intervalle, le raisonnement doit être modifié, car on ne peut faire les approximations successives en partant de la fonction y_0 satisfaisant à l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0.$$

On suppose que l'on parte de la fonction y_0 considérée à la fin du numéro précédent, pour laquelle

$$\frac{d^2 y_0}{dx^2} + f(x, y_0) > 0.$$

On peut de plus supposer que $y_0 < y$ (y_0 n'étant déterminé qu'à un facteur près).

Nous pouvons affirmer alors que l'expression

$$1 - \frac{y_0}{y}$$

reste moindre qu'un nombre q plus petit que l'unité, puisque pour $x = 0$ et $x = a$ la limite de $\frac{y_0}{y}$ ne peut être nulle. Il n'y a plus alors qu'à raisonner comme au n° **11** pour voir que y_n a nécessairement une limite, et cette limite est y. *Cette intégrale y est donc unique.*

16. Nous avons supposé, dans tout ce qui précède, que a était distinct des valeurs extrêmes α et β. Montrons que l'intégrale tend vers zéro quand a tend vers α. Nous allons raisonner comme au n° **14**, quoique dans des circonstances un peu différentes. Nous pouvons

prendre la constante ε assez petite, pour que, ayant posé

$$f'_y(x, \varepsilon) = R(x),$$

l'intervalle α' dans lequel s'applique, pour l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + R(x) y = 0,$$

la méthode des approximations successives, soit aussi peu supérieur que l'on voudra à α. Choisissons alors a entre α et α'. D'après le n° **14**, l'intégrale y de notre équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + f(x, y) = 0$$

est moindre que l'intégrale, prenant pour $x = 0$ et $x = a$ la valeur ε, et obtenue comme limite des approximations convergentes

$$\frac{d^2 y_2}{dx^2} + f(x, \varepsilon) = 0,$$

$$\frac{d^2 y^2}{dx^2} + f(x, y_1) = 0,$$

et ainsi de suite. Or on voit que chacun de ces y est de l'ordre de ε, c'est-à-dire peut se mettre sous la forme du produit de ε par une fonction restant finie; notre intégrale y est donc elle-même de l'ordre de ε; comme on peut faire tendre ε vers zéro a mesure que a se rapproche de plus en plus de α, il en résulte que l'intégrale y tend vers zéro, comme nous l'avons annoncé.

Supposons maintenant que a tende vers β. Nous aurons recours alors à la seconde partie du raisonnement du n° **14**. Puisque a est très voisin de β, nous pouvons prendre la quantité η extrêmement grande. Supposons de plus que le maximum de la fonction y_0 soit précisément η, ce que nous pouvons toujours réaliser, puisque y_0 n'est déterminé qu'à un facteur près. Dans ces conditions, notre intégrale atteindra certainement une valeur supérieure à η. Comme η est aussi grand que l'on veut, si a est suffisamment rapproché de β, on voit qu'il n'y a pas d'intégrale continue (outre $y = 0$) s'annulant pour $x = 0$ et pour $x = \beta$. Pour une valeur fixe quelconque de x (distincte de 0 et a) la

valeur de l'intégrale y de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x, y) = 0,$$

s'annulant pour 0 et pour a, augmente indéfiniment quand a tend vers β. Il résulte encore de ces considérations que, pour l'intégrale y correspondant à a, la valeur de la dérivée $\frac{dy}{dx}$ pour $x = 0$ varie d'une manière continue de zéro à l'infini quand a varie de α à β.

17. Dans tout ce qui précède, nous n'avons étudié que les intégrales restant toujours positives (ou nulles). Pour étudier d'autres intégrales, il est évidemment nécessaire de faire des hypothèses sur la nature de la fonction $f(x, y)$ et de ses dérivées pour y négatif. Supposons encore que cette fonction, qui s'annule pour $y = 0$, croisse toujours en même temps que y, et que la dérivée

$$f'_y(x, y),$$

toujours positive, ait un maximum pour $y = 0$, et n'ait ni minimum, ni autre maximum. On pourra alors étudier toutes les intégrales de l'équation. Faisons seulement, pour le moment, la remarque que l'intégrale étudiée aux n^{os} **14** et **15**, et qui s'annule pour $x = 0$ et pour $x = a$, ne sera pas nécessairement unique si l'on ne la suppose pas toujours positive dans l'intervalle $(0, a)$. D'une manière plus générale, *une intégrale n'est pas nécessairement déterminée d'une manière unique dans l'intervalle* $(0, a)$ *par ses valeurs initiale et finale;* nous allons toutefois montrer qu'il en sera nécessairement ainsi dans le cas où

$$a < \alpha.$$

Soient, en effet, y et z deux intégrales supposées distinctes satisfaisant aux mêmes conditions. On aura

$$\frac{d^2(y-z)}{dx^2} + f(x, y) - f(x, z) = 0$$

ou

$$\frac{d^2(y-z)}{dx^2} + (y-z)f'_y(x, \lambda) = 0,$$

λ étant compris entre y et z. Or on a

$$f'_y(x, \lambda) < f'_y(x, 0) = P(x).$$

Il en résulte que l'intervalle, partant de zéro, dans lequel une intégrale s'annulant aux deux extrémités est identiquement nulle, est plus grand pour l'équation

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + f'_y(x, \lambda)\, u = 0$$

que pour l'équation

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + P(x)\, u = 0.$$

Il est dès lors évident que les deux intégrales coïncident.

IV. — Extension aux cas de m équations.

18. Les résultats précédents s'étendent facilement à m équations

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2 y_1}{dx^2} + f_1(x, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0,\\
&\frac{d^2 y_2}{dx^2} + f_2(x, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\frac{d^2 y_m}{dx^2} + f_m(x, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0.
\end{aligned}$$

Comme le cas où x n'entre pas dans les équations est à la fois le plus intéressant et le plus simple, nous nous bornerons à ce cas, et considérerons les n équations

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned}
&\frac{d^2 y}{dx^2} + f_1(y, z, \ldots, u) = 0,\\
&\frac{d^2 z}{dx^2} + f_2(y, z, \ldots, u) = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{d^2 u}{dx^2} + f_m(y, z, \ldots, u) = 0,
\end{aligned}\right.$$

où les lettres $y, z, \ldots, u$ sont en nombre m.

Nous supposons que les fonctions f s'annulent pour

$$y = z = \ldots = u = 0.$$

Elles croissent quand les variables $y, z, \ldots, u$ augmentent. De plus, les dérivées nécessairement positives

$$\frac{\partial f_i}{\partial z}$$

(z étant une quelconque des lettres) décroissent quand les valeurs absolues des variables augmentent.

Nous aurons à faire tout à l'heure une hypothèse supplémentaire sur les dérivées du premier ordre, mais il nous faut examiner d'abord un cas particulier.

19. Arrêtons-nous sur le cas bien simple où les équations sont linéaires. Soit

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 y + a_2 z + \ldots + a_m u = 0,\\
&\frac{d^2 z}{dx^2} + b_1 y + b_2 z + \ldots + b_m u = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\frac{d^2 u}{dx^2} + l_1 y + l_2 z + \ldots + l_m u = 0,
\end{aligned}$$

les $a, b, \ldots, l$ sont alors positifs. L'équation en S,

$$\begin{vmatrix}
a_1 - S^2 & a_2 & \ldots & a_m\\
b_1 & b_1 - S^2 & \ldots & b_m\\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\\
l_1 & l_2 & \ldots & l_m - S^2
\end{vmatrix} = 0,$$

s'offre quand on cherche les intégrales de l'équation précédente de la forme

$$A \sin(Sx), \quad B \sin(Sx), \quad \ldots, \quad L \sin(Sx).$$

Cette équation admet au moins une racine positive S; considérons

la plus grande de ces racines que nous désignons par S_0. Les équations différentielles admettent le système d'intégrales

$$(12) \qquad A_0 \sin(S_0 x), \quad B_0 \sin(S_0 x), \quad \ldots, \quad L_0 \sin(S_0 x),$$

et l'on peut démontrer que les constantes $A_0, B_0, \ldots, L_0$ *sont toutes de même signe.*

Montrons que dans un intervalle de longueur moindre que $\frac{\pi}{S_0}$, la méthode des approximations successives donne certainement un résultat convergent. Nous allons d'abord établir que dans un tel intervalle tout système d'intégrales

$$y, \quad z, \quad \ldots, \quad u$$

restant positives (et non nulles) peut être obtenu par la méthode des approximations successives. On considère les équations successives

$$\frac{d^2 y_0}{dx^2} = 0, \qquad \frac{d^2 z_0}{dx^2} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{d^2 u_0}{dx^2} = 0,$$

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + a_1 y_0 + a_2 z_0 + \ldots + a_m u_0 = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{d^2 u_1}{dx^2} + l_1 y_0 + l_2 z_0 + \ldots + l_m u_0 = 0,$$

et ainsi de suite, les valeurs initiale et finale aux extrémités de l'intervalle étant toujours les mêmes pour chacune des fonctions. On a évidemment

$$y_0 < y_1 < \ldots,$$
$$z_0 < z_1 < \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$u_0 < u_1 < \ldots.$$

$y, z, \ldots, u$ sont d'ailleurs nécessairement aussi supérieures respectivement à $y_0, z_0, \ldots, u_0$. Les quotients

$$\frac{y - y_0}{y}, \quad \frac{z - z_0}{z}, \quad \ldots, \quad \frac{u - u_0}{u}$$

restent compris entre zéro et un, et l'on peut trouver un nombre $q < 1$, auquel ils restent inférieurs. Des deux systèmes d'équations

$$\frac{d^2(y-y_0)}{dx^2} + a_1 y + \ldots + a_m u = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{d^2(y-y_1)}{dx^2} + a_1(y-y_0) + \ldots + a_m(u-u_0) = 0,$$

on conclut

$$\frac{y-y_1}{y-y_0} < q, \qquad \ldots \qquad \frac{u-u_1}{u-u_0} < q,$$

et en continuant ainsi de proche en proche, on a

$$y - y_n < y q^{n+1}, \qquad \ldots, \qquad u - u_n < u q^{n+1},$$

ce qui établit bien que

$$\lim y_n = y, \qquad \ldots, \qquad \lim u_n = u \qquad (\text{pour } n = \infty).$$

Ce point établi, la méthode des approximations successives réussira pour l'intégrale (12), et, par suite, pour tout système de valeurs initiales et finales, puisqu'on peut toujours supposer que celles-ci sont moindres en valeur absolue que les valeurs correspondantes de (12).

Remarquons encore qu'une intégrale est complètement déterminée, dans l'intervalle considéré, par ses valeurs initiale et finale. Dans le cas contraire, en effet, on aurait une intégrale du système s'annulant aux deux extrémités de l'intervalle sans être identiquement nulle. Or cela est impossible; on peut, en effet, obtenir un système de $2n$ intégrales ayant des valeurs initiale et finale arbitraire (en employant les approximations successives) : avec ces intégrales on formera l'intégrale générale, et il est clair que ces intégrales s'annulant aux deux extrémités de l'intervalle seront identiquement nulles, puisque on aura, pour déterminer les constantes, un système de $2m$ équations linéaires homogènes à $2m$ inconnues, dont le déterminant ne sera pas nul puisque toutes les lettres qui y figurent sont arbitraires.

20. Revenons maintenant au système général (11). J'envisage l'équation en S

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} - S^2 & \frac{\partial f_1}{\partial z} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} - S^2 & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial y} & \frac{\partial f_m}{\partial z} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial u} - S^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation a au moins une racine positive, et c'est sur la plus grande que nous portons notre attention. Cette racine peut être considérée comme une fonction de $y, z, \dots, u$.

Nous supposons qu'elle atteigne sa valeur maxima pour

$$y = z = \dots = u = 0,$$

et qu'elle aille toujours en décroissant *quand les valeurs absolues des variables augmentent.*

Nous allons pouvoir, sous ces conditions, étendre au système (11) la plupart des résultats obtenus dans le cas d'une seule équation. Deux systèmes d'équations linéaires vont jouer un rôle essentiel comme équations de comparaison. Posons

$$(\mathrm{T}) \quad \left\{ \begin{array}{llll} \frac{\partial f_1}{\partial y} = a_1, & \frac{\partial f_2}{\partial z} = a_2, & \dots, & \frac{\partial f_1}{\partial u} = a_m, \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} = b_1, & \dots\dots\dots, & \dots, & \frac{\partial f_2}{\partial u} = b_m, \\ \dots\dots\dots, & \dots\dots\dots, & \dots, & \dots\dots\dots, \\ \frac{\partial f_m}{\partial y} = l_1, & \dots\dots\dots, & \dots, & \frac{\partial f_m}{\partial u} = l_m, \end{array} \right.$$

quand on fait dans les premiers membres $y = z = \dots = u = 0$. Désignons de même par les grandes lettres $A_1, A_2, \dots, L_m$ les valeurs de ces dérivées pour

$$y = z = \dots = u = +\infty.$$

Les deux systèmes d'équations linéaires seront les systèmes à coefficients constants formés avec ces coefficients et de même forme que ceux qui ont été considérés au n° **19**. Au premier système formé avec les petites lettres correspond un intervalle α $\left(\alpha = \frac{\pi}{S_0}\right)$, et au second système formé avec les grandes lettres correspond un intervalle β; d'après les hypothèses faites, on aura

$$\alpha < \beta.$$

21. Ceci posé, revenons au système (11). Nous voulons montrer qu'il existe une intégrale de cette équation, non nulle identiquement, et s'annulant pour $x = 0$ et pour $x = a$, *a étant compris entre* α *et* β.

Nous allons nous placer au même point de vue que précédemment. Nous partons de m fonctions toujours positives, s'annulant pour $x = 0$ et pour $x = a$; on va montrer d'abord que la série des approximations successives est convergente. Considérons à cet effet une quantité positive ε et désignons par

$$\begin{matrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \ldots, & \alpha_m, \\ \beta_1, & \beta_2, & \ldots, & \beta_m, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ \lambda_1, & \lambda_2, & \ldots, & \lambda_m \end{matrix}$$

les valeurs du Tableau (T) des dérivées pour

$$y = z = \ldots = u = \varepsilon.$$

On peut choisir ε assez grand pour que, S désignant la plus grande racine positive de l'équation

$$(13) \qquad \begin{vmatrix} \alpha_1 - S^2 & \alpha_2 & \alpha_m \\ \beta_1 & \beta_2 - S^2 & \beta_m \\ \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_m - S^2 \end{vmatrix} = 0,$$

le quotient $\frac{\pi}{S}$ soit supérieur à a; ceci résulte de ce que, pour ε très grand, cette quantité $\frac{\pi}{S}$ se réduit à β.

Ceci posé, cherchons les intégrales du système (11), prenant pour $x = 0$ et pour $x = a$ la valeur ε. La méthode des approximations successives nous fournira une suite de fonctions

$$\begin{array}{llll} y_0 = \varepsilon, & z_0 = \varepsilon, & \ldots, & u_0 = \varepsilon, \\ y_1, & z_1, & \ldots, & u_1, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ y_n, & z_n, & \ldots, & u_n, \end{array}$$

et toutes ces fonctions sont supérieures à ε.

Montrons que cette suite a une limite. Prenons, en effet, les équations dont nous écrivons seulement la première,

$$(14) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d^2(y_n - y_{n-1})}{dx^2} + f_1(y_{n-1}, z_{n-1}, \ldots, u_{n-1}) \\ \qquad\qquad - f_1(y_{n-2}, z_{n-2}, \ldots, u_{n-2}) = 0, \end{array} \right.$$

et désignons par

$$k_{1,1}, \quad k_{1,2}, \quad \ldots, \quad k_{1,m}$$

les valeurs des dérivées partielles

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_1}{\partial z}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f_1}{\partial u}$$

pour $y = z = \ldots = u = \varepsilon$.

Considérons alors le système d'équations linéaires

$$(15) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d^2 U}{dx^2} + k_{1,1} U + k_{1,2} V + \ldots + k_{1,m} W = 0, \\ \dfrac{d^2 V}{dx^2} + k_{2,1} U + k_{2,2} V + \ldots + k_{2,m} W = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{d^2 W}{dx^2} + k_{m,1} U + k_{m,2} V + \ldots + k_{m,m} W = 0. \end{array} \right.$$

La plus grande racine positive S de l'équation

$$\begin{vmatrix} k_{1,1} - S^2 & k_{1,2} & k_{1,m} \\ k_2 & k_{2,2} - S^2 & k_{2,m} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ k_{m,1} & k_{m,2} & k_{m,m} - S^2 \end{vmatrix} = 0$$

est moindre, d'après nos hypothèses fondamentales, que les racines de l'équation (13); elle est donc supérieure à a. Il en résulte que les approximations successives fournies par les équations (14) seront convergentes, puisque l'on a manifestement

$$|y_n - y_{n-1}| < U_{n-1}, \qquad \ldots, \qquad u_n - u_{n-1} < W_{n-1},$$

si l'on a pris

$$y_1 - y_0 = U_0, \qquad \ldots, \qquad u_1 - u_0 = W_0.$$

Nous obtenons donc un système d'intégrales, toujours positives, prenant pour $x = 0$ et pour $x = a$ la valeur ε (ε étant une constante suffisamment grande). Si maintenant nous partons de m fonctions positives s'annulant pour $x = 0$ et pour $x = a$ et inférieures à ε, les approximations convergeront *a fortiori*, et, par suite, nous obtenons un système d'*intégrales*

$$y, \quad z, \quad \ldots, \quad u$$

s'annulant pour $x = 0$ *et* $x = a$.

On doit toutefois se demander si ces intégrales ne sont pas identiquement nulles. Il suffit pour cela (n° **14**) de voir que l'on peut trouver des fonctions $y_0, z_0, \ldots, u_0$ positives et s'annulant pour $x = 0$ et pour $x = a$ telles que

$$(16) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 y_0}{dx^2} + f_1(y_0, z_0, \ldots, u_0) > 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{d^2 u_0}{dx^2} + f_m(y_0, z_0, \ldots, u_0) > 0. \end{cases}$$

Soit, à cet effet, η une quantité positive et désignons par

$$\begin{matrix} h_{11}, & h_{12}, & \ldots, & h_{1m}, \\ h_{21}, & h_{22}, & \ldots, & h_{2m}, \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ h_{m1}, & h_{m2}, & \ldots, & h_{mm}, \end{matrix}$$

le Tableau des dérivées partielles du premier ordre des f pour

$$y = z = \ldots = u = \eta.$$

On peut choisir η de telle sorte que la quantité α_1, relative au système analogue à (15) où les k ont été remplacés par les h, soit précisément égale à a. Ceci est évident, puisque, pour $\eta = 0$, $\alpha_1 = \alpha$ et que, pour $\eta = \infty$, $\alpha_1 = \beta$. On prendra alors pour $y_0, z_0, \ldots, u_0$ les intégrales du système (λ) (voir *loc. cit.*) s'annulant pour $x = 0$ et pour $x = a$. Comme ces intégrales ne sont déterminées qu'à un facteur constant près, nous les prenons telles qu'elles ne dépassent pas η.

Il est clair que pour ces fonctions les inégalités (16) sont vérifiées, puisque

$$f_i(y_0, z_0, \ldots, u_0) > h_{i,1} y_0 + h_{i,2} z_0 + \ldots + h_{i,m} u_0.$$

Nous prendrons alors, pour commencer les approximations, les fonctions $y_0, z_0, \ldots, u_0$, et comme les $y_n, z_n, \ldots, u_n$ iront certainement en croissant avec n, nous sommes assuré d'avoir des limites qui ne seront pas nulles.

22. On étudierait facilement les cas de

$$a = \alpha \qquad \text{et} \qquad a = \beta.$$

Quand a tend vers α, les intégrales tendent vers zéro, et quand a tend vers β les intégrales augmentent indéfiniment : je veux dire que pour une valeur quelconque x (distincte de 0 et β) les valeurs de $y, z, \ldots, u$ augmentent indéfiniment quand a tend vers β.

23. Indiquons un exemple d'équations différentielles auxquelles

s'appliquent les principes que nous venons d'indiquer. Prenons les deux équations

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha y + \beta(1 - e^{-y}) + \alpha' z + \beta'(1 - e^{-z}) = 0,$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \gamma y + \delta(1 - e^{-y}) + \gamma' z + \delta'(1 - e^{-z}) = 0,$$

les α, β, γ et δ étant des constantes positives.

Les seconds membres sont des fonctions croissantes de y et z (on se borne à y et z positifs); de plus leurs dérivées partielles du premier ordre décroissent quand les valeurs de y et z augmentent. Nous devons encore considérer l'équation en S

$$\begin{vmatrix} \alpha + \beta e^{-y} - S^2 & \alpha' + \beta' e^{-z} \\ \gamma + \delta e^{-y} & \gamma' + \delta' e^{-z} - S^2 \end{vmatrix} = 0.$$

La plus grande racine positive S de cette équation est une fonction de y et z. Il faut, pour appliquer la théorie, qu'elle aille en décroissant quand les valeurs de y et z augmentent. Il serait aisé de rechercher les conditions auxquelles doivent satisfaire les constantes pour qu'il en soit ainsi. Nous nous bornerons à remarquer que l'hypothèse nécessaire sera certainement réalisée, si

$$\alpha\gamma' - \gamma\alpha' < 0,$$
$$\beta\gamma' - \alpha'\delta < 0,$$
$$\alpha\delta' - \beta'\gamma < 0,$$
$$\beta\delta' - \beta'\delta < 0.$$

24. Pour le cas d'une seule équation, indiquons un exemple où l'on pourra faire aussi, d'après les mêmes principes, l'étude des intégrales correspondant à y négatif, et qui est algébrique,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha y + \frac{\beta y}{\sqrt{1+y^2}} = 0,$$

α et β étant des fonctions positives de x.

La fonction positive

$$f(x,y) = \alpha y + \frac{\beta y}{\sqrt{1+y^2}}$$

augmente avec y, et sa dérivée

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha + \frac{\beta}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

va bien en décroissant en même temps que y augmente.

V. — Suppression de quelques hypothèses restrictives.

25. Les conditions imposées aux fonctions entrant dans les équations différentielles sont susceptibles d'être un peu élargies. On peut prendre, en quelque sorte, ces fonctions comme fonctions de comparaison auxquelles on cherchera à en comparer d'autres.

Prenons les équations (en nous bornant, pour abréger, au cas de deux équations)

$$(17) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 y}{dx^2} + f(y, z) = 0, \\[2ex] \dfrac{d^2 z}{dx^2} + \varphi(y, z) = 0. \end{cases}$$

Supposons que les fonctions positives f et φ s'annulent pour $y = z = 0$ et soient, comme précédemment, croissantes avec y et z (nous ne considérons pour le moment que y et z positifs). De plus, quand y et $z < l$, les dérivées du premier ordre sont supposées décroissantes dans les mêmes conditions.

On voit que nous faisons seulement dans l'intervalle $(0, l)$ pour les dérivées du premier ordre les hypothèses que nous faisions tout à l'heure de zéro à l'infini; l pourra être très petit.

En outre, nous supposons maintenant qu'on peut trouver deux fonctions positives $F(y, z)$ et $\Phi(y, z)$ s'annulant pour $y = 0$, $z = 0$ définies pour

$$y < L, \qquad z < L,$$

et telles que dans cet intervalle

$$f(y, z) \leqq F(y, z), \qquad \varphi(y, z) \leqq \Phi(y, z),$$

les fonctions F et Φ satisfaisant dans l'intervalle $(0, L)$ aux conditions que remplissaient les fonctions f de la Section précédente; de plus, les dérivées partielles du premier ordre des fonctions F et Φ ont respectivement les mêmes valeurs pour $y = z = 0$ que les dérivées de f et φ.

Si nous considérons les deux équations

$$(18) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 Y}{dx^2} + F(Y, Z) = 0, \\ \dfrac{d^2 Z}{dx^2} + \Phi(Y, Z) = 0, \end{cases}$$

nous pouvons leur appliquer la théorie de la Section précédente, en nous bornant toutefois à l'intervalle que j'appelle (α, γ) tel que l'intégrale s'annulant pour $x = 0$ et $x = a$,

$$\alpha < a < \gamma,$$

reste inférieure à L.

Nous voulons démontrer que les équations (17) admettront des intégrales non nulles identiquement s'annulant pour $x = 0$ et pour $x = a$, la quantité a satisfaisant aux inégalités précédentes.

Tout d'abord, si a est très voisin de α, nous avons, d'après la théorie de la Section précédente une intégrale toujours positive s'annulant pour $x = 0$ et $x = a$ et restant très voisine de zéro.

Quand a est quelconque entre α et γ, la méthode des approximations successives nous donne certainement une limite; c'est ce qui résulte de la comparaison des systèmes d'équations (17) et (18). Puisqu'il y a une limite pour ces dernières équations, il y en aura une aussi pour les premières.

On pourrait craindre que les valeurs trouvées pour y et z ne fussent identiquement nulles. On peut démontrer de la manière suivante qu'il n'en est rien. Soit α_1 une quantité très voisine de α; on pourra (*voir* n° **21**) déterminer deux fonctions y_0 et z_0 s'annulant pour $x = 0$

et $x = \alpha_1$, telles que

$$\frac{d^2 y_0}{dx^2} + f(y_0, z_0) > 0,$$

$$\frac{d^2 z_0}{dx^2} + \varphi(y_0, z_0) > 0.$$

Pour déterminer les intégrales y et z s'annulant pour $x = 0$ et $x = a$, on prendra pour commencer les approximations les fonctions y_0 et z_0 précédentes de 0 à α_1 et de α_1 à a, on prendra $y_0 = 0$, $z_0 = 0$. A la vérité, les fonctions y_0 et z_0 ainsi constituées n'ont pas leurs dérivées continues de 0 à a, mais il est facile de se rendre compte que cela n'a pas d'importance pour l'emploi de la méthode. On déterminera la suite de fonctions approchées, et dans cette suite les y_n et les z_n iront en augmentant constamment avec l'indice n : la limite ne pourra donc être nulle.

26. Indiquons une équation où l'on pourra appliquer ce qui précède. Nous avons considéré plus haut l'équation

$$(19) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} + \alpha y + \frac{\beta y}{\sqrt{1 + y^2}} = 0,$$

α et β étant des fonctions positives de x.

Considérons maintenant l'équation

$$(20) \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} + \alpha y + \frac{\beta y}{\sqrt{1 + y^2}} - \gamma \sin^2 y = 0,$$

γ étant une fonction positive de x et telle que, pour toute valeur de x que nous allons considérer,

$$\alpha \geqq \gamma.$$

La fonction

$$\varphi(y) = \alpha y + \frac{\beta y}{\sqrt{1 + y^2}} - \gamma \sin^2 y;$$

où nous mettons seulement y en évidence, a pour dérivée

$$\varphi'(y) = \alpha + \frac{\beta}{(1 + y^2)^{\frac{3}{2}}} - \gamma \sin^2 y,$$

cette dérivée sera toujours positive et par conséquent $\varphi(y)$ ira en croissant avec y. $\varphi'(y)$ n'ira pas toujours en décroissant quand y variera de 0 à ∞, mais il en sera ainsi dans le voisinage de $y = 0$, puisque

$$\varphi''(0) = -2\gamma.$$

D'autre part, en posant

$$\Phi(y) = \alpha y + \frac{\beta y}{\sqrt{1+y^2}},$$

on aura

$$\varphi(y) < \Phi(y).$$

Enfin on a

$$\varphi'(0) = \Phi'(0).$$

Nous pouvons donc appliquer les remarques précédentes, et l'on aura certainement une intégrale s'annulant pour $x = 0$ et $x = a$, en prenant a dans l'intervalle défini pour l'équation (19).

CHAPITRE III.

APPLICATIONS DES RÉSULTATS PRÉCÉDENTS.

VI. — Cas d'une seule équation.

27. Reprenons l'équation

$$(\mathrm{E}) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + f(x, y) = 0,$$

en faisant les mêmes hypothèses qu'au Chapitre précédent. Ces hypothèses étaient relatives à y positif. Si nous voulons étudier des intégrales devenant négatives, il est indispensable de compléter ces hypothèses. Supposons donc que l'équation obtenue en changeant y en

$-y$, c'est-à-dire l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - f(x, -y) = 0$$

rentre dans le même type que l'équation (E), pour y positif.

Toutes ces conditions étant remplies, nous sommes assuré de pouvoir suivre une intégrale quelconque pour toute valeur de x, si, bien entendu, nous supposons $f(x, y)$ définie et continue pour toute valeur réelle de x. L'équation (E) appartient en effet au type d'équations au sujet desquelles nous avons démontré (n° **2**) un théorème général.

Toute intégrale de l'équation (E) *devra nécessairement s'annuler.* — Supposons en effet qu'une intégrale ne s'annule pas à partir de $x = 0$. Désignons encore par α et β (n° **14**) les deux nombres relatifs à $x = 0$, qui ont joué un rôle fondamental dans toute la théorie du Chapitre précédent. Si l'intégrale considérée ne s'annule pas à partir de $x = 0$, nous aurons une intégrale restant toujours positive et différente de zéro dans un intervalle $(0, h)$,

$$h \text{ étant supérieur à } \beta.$$

On pourra alors obtenir une intégrale, non identiquement nulle, s'annulant pour $x = 0$ et pour $x = h$, et restant toujours positive dans cet intervalle, ce qui est en contradiction avec les résultats précédemment obtenus, puisque c'est seulement dans l'intervalle $(0, a)$, où

$$\alpha < a < \beta,$$

que l'on peut déterminer une intégrale s'annulant aux deux extrémités et toujours positive dans l'intervalle.

On peut encore démontrer de la manière suivante le théorème précédent, en remarquant que, si a est inférieur à β, mais en est très voisin, l'intégrale qui s'annule pour $x = 0$ et pour $x = a$ devient très grande (n° **16**); la courbe intégrale que nous étudions et cette seconde courbe intégrale auront donc au moins deux points communs, et, par suite, nous aurions deux intégrales positives prenant les mêmes valeurs pour deux valeurs de x, ce qui est impossible.

L'intégrale s'annulant une fois devra s'annuler une infinité de fois, et, comme nous l'avons dit d'une manière générale, on pourra suivre sa valeur de proche en proche.

La courbe représentée par toute intégrale aura donc la forme d'une sinusoïde, et l'on peut dire que le problème de l'intégration pour l'équation (E) est résolu, si l'on entend par là qu'on peut suivre avec précision les valeurs de la fonction quand x augmente indéfiniment.

28. Soient deux valeurs x_0 et x_1 de $x (x_0 < x_1)$. A un intervalle commençant en x_0 correspondent pour l'équation (E) une longueur β et une longueur α, en gardant toujours la même notation générale.

Considérons ensuite l'équation transformée de E

$$(\mathrm{E}') \qquad \frac{d^2 y}{dx'^2} - f(x_1 - x', -y') = 0.$$

Pour cette équation en x', nous aurons, pour un intervalle commençant à $x' = 0$, une longueur β' et une longueur α'. Supposons maintenant que les quantités

$$x_0, \quad x_1 - \beta', \quad x_0 + \beta, \quad x_1$$

soient rangées par ordre croissant de grandeur et que de plus

$$x_1 - \alpha' > x_0 + \alpha.$$

Nous allons montrer qu'*il existe au moins une intégrale de l'équation s'annulant pour $x = x_0$ et pour $x = x_1$.*

Désignons par λ une arbitraire comprise entre

$$x_1 - \beta' \quad \text{et} \quad x_0 + \beta.$$

Il y aura une intégrale toujours positive de l'équation (E) s'annulant pour x_0 et λ; de même l'équation (E′) admettra une intégrale toujours positive s'annulant pour $x' = 0$ et $x' = x_1 - \lambda$ et, par suite, l'équation (E) admettra une intégrale toujours négative s'annulant

pour $x = x_1$ et $x = \lambda$. Les deux intégrales que nous venons de trouver peuvent-elles être la continuation l'une de l'autre. Il faut et il suffit que leur dérivée première ait la même valeur pour $x = \lambda$. Désignons par θ et θ' les angles compris entre o et $\frac{\pi}{2}$ que font les tangentes aux deux courbes au point $x = \lambda$, $y = 0$ avec l'axe des x. L'équation

$$\theta - \theta' = 0 \tag{21}$$

est une équation en λ, puisque θ et θ' dépendent de λ. Il faut montrer que cette équation a une racine entre $x_1 - \beta'$ et $x_0 + \beta$. Or, quand x est très voisin de $x_1 - \beta'$, θ' est voisin de $\frac{\pi}{2}$, tandis que θ a une valeur différente de $\frac{\pi}{2}$, donc $\theta - \theta'$ est négatif pour cette valeur de x; au contraire, pour x voisin de $x_0 + \beta$, θ est voisin de $\frac{\pi}{2}$ tandis que θ' a une valeur différente de $\frac{\pi}{2}$: la différence $\theta - \theta'$ sera alors positive. L'équation (21) aura donc au moins une racine correspondant à une valeur λ_1 telle que

$$x_1 - \beta' < \lambda_1 < x_0 + \beta.$$

Est-on assuré que l'intégrale correspondante ne sera pas nulle identiquement? Oui, puisque autrement il faudrait que l'on eût à la fois

$$\lambda_1 < x_0 + \alpha, \qquad \lambda_1 > x_1 - \alpha',$$

ce qui est incompatible avec nos hypothèses. Nous avons donc bien une intégrale non nulle identiquement et s'annulant pour $x = x_0$ et $x = x_1$: cette intégrale ne garde pas un signe invariable entre les deux valeurs extrêmes.

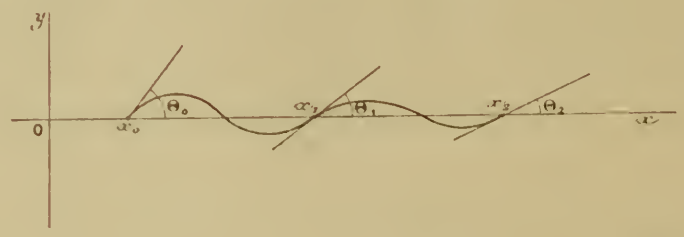
29. Occupons-nous maintenant d'un cas particulièrement intéressant : celui où la fonction $f(x, y)$ serait périodique par rapport à x et de période ω. Considérons un intervalle $(x_0, x_0 + \omega)$. En supposant remplies les hypothèses du n° **28**, nous avons une intégrale s'annulant pour x_0 et $x_0 + \omega$. Cette intégrale ne sera pas en général périodique, car pour x_0 et $x_0 + \omega$ les dérivées n'auront pas la même valeur.

En écrivant cette condition, on aura une équation en x_0

$$F(x_0) = 0.$$

A chaque racine réelle de cette équation correspondra une solution périodique. Nous indiquerons tout à l'heure des cas assez étendus où il y a une solution périodique.

Je veux pour le moment rester dans le cas général. Soit x_0 une valeur arbitraire. On peut considérer l'intégrale.



Si l'on se donne l'angle Θ_0 $\left(0 < \Theta_0 < \frac{\pi}{2}\right)$ de la tangente avec Ox pour l'intégrale s'annulant en x_0, cette intégrale sera complètement déterminée. Elle sera d'abord positive, deviendra négative et s'annulera pour la seconde fois en x_1; soit Θ_1 l'angle, compté comme l'indique la figure, de la tangente avec Ox $\left(0 < \Theta_1 < \frac{\pi}{2}\right)$. L'angle Θ_1 est une fonction de Θ_0 et nous formons l'équation en Θ_0

$$\Theta_1 - \Theta_0 = 0.$$

Elle admettra la racine $\Theta_0 = 0$, puisque Θ_1 s'annule en même temps que Θ_0. Elle peut admettre d'autres racines ou n'en pas admettre, en laissant de côté le cas limite $\Theta_0 = \Theta_1 = \frac{\pi}{2}$, qui ne correspond pas, à proprement parler, à une intégrale. Soit Θ_0^0 la plus petite racine, si il y a des racines (en dehors de zéro) : la différence

$$\Theta_1 - \Theta_0$$

aura un signe invariable quand Θ_0 variera de zéro à Θ_0^0. Supposons

qu'elle soit négative et que par suite

$$\Theta_0 > \Theta_1,$$

lorsque l'on a

$$\Theta_0 < \Theta_0^0.$$

Quand x_0 variera d'une manière continue dans un intervalle égal à ω, la racine minima Θ_0^0 variera aussi d'une manière continue et nous allons supposer qu'*elle n'atteigne jamais zéro :* soit h son minimum.

Dans ces conditions, il est facile de chercher ce que devient pour x positif et très grand l'intégrale s'annulant pour une valeur arbitraire x_0 et dont la tangente en ce point fait avec l'axe des x un angle Θ_0 inférieur à h. D'après ce que nous venons de dire, au second point de rencontre x_1 de la courbe avec Ox, on a

$$\Theta_1 < \Theta_0.$$

Continuons à suivre la courbe; Θ_1 étant inférieur à Θ_0 est certainement inférieur à h. et, par suite, pour le troisième point de rencontre x_2 (à partir de x_0), on aura

$$\Theta_2 < \Theta_1.$$

On peut continuer ainsi indéfiniment; tous les angles positifs Θ vont aller en diminuant et ils auront par suite une limite. Cette limite ne pourra être que zéro. Plaçons-nous en effet dans l'hypothèse contraire, et soit k cette limite différente de zéro; pour n suffisamment grand Θ_n, diffère de k d'aussi peu que l'on veut. Or entre o et ω il existe un point x' homologue de x_n. L'intégrale s'annulant en x' et faisant avec Ox l'angle Θ_n conduira à un point suivant avec un angle Θ'_n plus petit que Θ_n, mais en différant d'une quantité finie; or cette branche de courbe devrait être identique à celle qui commence en x_n, et par suite Θ'_n devrait être égal à Θ_{n+1}, ce qui est, comme on le voit, impossible.

Il résulte de là que *l'intégrale considérée tend vers zéro quand x augmente indéfiniment en étant positif.*

On voit que l'équation considérée admet une infinité d'intégrales asymptotiques à $y = 0$, c'est-à-dire d'intégrales qui, à partir d'une valeur positive de x suffisamment grande diffèrent de *zéro* d'aussi peu qu'on veut. Ces solutions sont différentes des solutions asymptotiques de M. Poincaré, et ne sont pas susceptibles, en général, de la représentation analytique en série d'exponentielles qui est, pour l'éminent auteur, la définition des solutions asymptotiques.

30. Nous avons dit que la recherche des solutions périodiques revient à la résolution d'une équation que nous avons appelée

$$F(x_0) = 0.$$

L'étude des racines de cette équation sera, en général, extrêmement difficile. Je veux indiquer cependant un cas intéressant où l'on pourra établir l'existence d'une solution périodique. Reprenons l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x, y) = 0$$

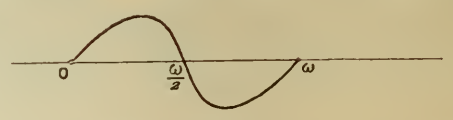
satisfaisant aux conditions des paragraphes précédents. La fonction $f(x, y)$ est périodique par rapport à x et de période ω. Supposons que

$$f(x, y) = f(\omega - x, y)$$

et que, de plus,

$$f(x, y) = -f(x, -y).$$

Partons de $x_0 = 0$. Si, comme nous l'admettons, les nombres α et β relatifs à l'origine comprennent entre eux $\frac{\omega}{2}$, il y aura une intégrale de l'équation s'annulant pour $x = 0$ et $x = \frac{\omega}{2}$ et qui ne sera pas iden-



tiquement nulle. Je dis que cette solution sera une solution périodique.

Prenons, en effet, la courbe symétrique par rapport à $x = \frac{\omega}{2}$, $y = 0$, de la branche de courbe dont nous venons de parler. Il est aisé de voir qu'elle satisfera à l'équation différentielle.

En désignant par $y = \varphi(x)$ l'équation de la première branche, on aura pour équation de la symétrique

$$y = -\varphi(\omega - x).$$

Donc

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\varphi''(\omega - x),$$

et nous devons montrer que l'équation

$$-\varphi''(\omega - x) + f[x, -\varphi(\omega - x)] = 0$$

est vérifiée. Or elle pourra s'écrire

$$\varphi''(\omega - x) + f[x, \varphi(\omega - x)] = 0,$$

et enfin, puisque $f(x, y) = f(\omega - x, y)$,

$$\varphi''(\omega - x) + f[\omega - x, \varphi(\omega - x)] = 0,$$

qui est manifestement vérifiée.

31. Indiquons un exemple. Soit l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \tfrac{1}{2}y\sin^2 x + (1 + \tfrac{1}{2}\cos^2 x)\frac{y}{\sqrt{1 + y^2}} = 0.$$

Nous regardons la fonction $f(x, y)$ correspondante comme admettant la période 2π, c'est-à-dire que $\omega = 2\pi$; on a bien en plus

$$f(x, y) = f(2\pi - x, y).$$

L'équation rentre d'ailleurs dans la classe qui nous occupe actuellement. Il nous faut chercher les deux nombres α et β pour recon-

naître si l'on a

$$\alpha < \pi < \beta. \tag{21}$$

Or α est le nombre relatif à l'équation linéaire

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y f'_y(x, 0) = 0,$$

et β correspond à l'équation linéaire

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y f'_y(x, \infty) = 0.$$

Nous aurons donc ici, pour la première équation,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2y = 0, \tag{22}$$

et, pour la seconde,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \tfrac{1}{2} y \sin^2 x = 0. \tag{23}$$

Pour l'équation (22) nous avons de suite $\alpha = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$; dans un intervalle moindre que $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ une intégrale s'annulant aux deux extrémités est identiquement nulle. Pour l'équation (23) nous ne pouvons trouver la valeur exacte de β (si ce n'est sous forme de série), mais nous pouvons avoir une limite inférieure de β et cela nous suffira. Si, en effet, au lieu de l'équation (23), on envisage l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \tfrac{1}{2} y = 0,$$

le nombre β correspondant à l'équation (23) sera plus grand que celui qui correspond à cette dernière équation. Par suite

$$\beta > \pi\sqrt{2}.$$

Puisque $\alpha = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$ et $\beta > \pi\sqrt{2}$, nous sommes assuré que les inégalités (21) sont vérifiées.

Il existe donc une intégrale de période 2π pour l'équation proposée, et nous pouvons l'obtenir sous forme de série convergente, par notre méthode d'approximations successives.

VII. — Cas de plusieurs équations.

32. Ce que nous venons de dire relativement à une équation peut s'étendre à plusieurs équations pour ce qui concerne les solutions périodiques. Nous supposerons, comme nous l'avons fait plus haut, quoique ce ne soit nullement nécessaire, que la variable indépendante n'entre pas explicitement dans les équations. Prenons donc, en nous bornant à deux équations,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(y, z) = 0,$$
$$\frac{d^2z}{dx^2} + \varphi(y, z) = 0,$$

les fonctions f et φ satisfaisant aux conditions du Chapitre précédent. Nous aurons, comme il a été expliqué au n° **20**, deux nombres α et β correspondant à ce système d'équations. Si l'on a

$$\alpha < \frac{\omega}{2} < \beta,$$

il existera une intégrale s'annulant pour une valeur arbitraire de x_0, et pour $x_0 + \frac{\omega}{2}$. Nous pouvons supposer $x_0 = 0$.

Si maintenant nous faisons l'hypothèse que

$$f(-y, -z) = -f(y, z),$$
$$\varphi(-y, -z) = -\varphi(y, z),$$

nous allons établir que les équations admettront une solution périodique de période ω. On le voit de suite, puisqu'il suffit de prendre la courbe symétrique par rapport au point $\left(x = 0,\ y = \frac{\omega}{2}\right)$ de la solution que nous avons définie plus haut pour avoir le prolongement de l'intégrale, et l'on obtient bien ainsi une solution périodique.

Ainsi notre système admet une infinité d'intégrales périodiques avec une période arbitraire ω. Ces solutions périodiques dépendent, par conséquent, de deux constantes arbitraires (la seconde constante étant x_0).

55. Donnons un exemple. Soient les deux équations

$$(24)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{Ay}{\sqrt{1+y^2}} + \dfrac{Bz}{\sqrt{1+z^2}} = 0, \\[2ex] \dfrac{d^2z}{dx^2} + \dfrac{Cy}{\sqrt{1+y^2}} + \dfrac{Dz}{\sqrt{1+z^2}} = 0 \end{cases}$$

A, B, C, D étant des constantes positives. Conformément à la théorie générale, nous devons considérer l'équation

$$\begin{vmatrix} \dfrac{A}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}} - S^2 & \dfrac{B}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}} \\[2ex] \dfrac{C}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}} & \dfrac{D}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}} - S^2 \end{vmatrix} = 0.$$

La plus grande racine positive S de cette équation est une fonction de y et z. Il faut pour appliquer la théorie qu'elle aille en décroissant quand les valeurs de y et z (positives) augmentent. En posant

$$\frac{1}{(1+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \lambda, \qquad \frac{1}{(1+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \mu,$$

nous avons l'équation

$$\begin{vmatrix} A\lambda - S^2 & B\mu \\ C\lambda & D\mu - S^2 \end{vmatrix} = 0.$$

La plus grande racine positive S doit diminuer quand λ et μ vont en diminuant de *un* à *zéro*. On vérifie de suite qu'il en est certainement ainsi si

$$AD - BC < 0.$$

Les quantités désignées d'une manière générale par α et β sont ici

$$\beta = \infty,$$

$$\alpha = \frac{\pi}{S_0},$$

S_0 étant la racine de l'équation précédente correspondant à $\lambda = \mu = 1$, c'est-à-dire que l'on a

$$S_0^2 = A + D + \sqrt{(A + D)^2 + 4(BC - AD)}.$$

Nous pouvons donc affirmer que *les équations* (24) *admettent une intégrale de période* ω, ω *étant arbitraire, mais supérieur à* $\frac{2\pi}{S_0}$.

34. Dans ce qui précède, les fonctions f et φ étaient définies pour toutes valeurs de y et z, mais on peut, dans bien des cas, appliquer la théorie quand les fonctions sont définies seulement dans le voisinage de $y = z = 0$, ou quand elles jouissent seulement dans ce voisinage des propriétés nécessaires pour nos raisonnements; c'est une remarque que nous avons déjà faite (Section V) et qui est susceptible d'accroître beaucoup les cas où l'on pourra se servir de la méthode.

De l'équation $\Delta u = ke^u$ sur une surface de Riemann fermée;

PAR M. ÉMILE PICARD.

Dans un Mémoire antérieur (*Journal de Mathématiques;* 1890), j'ai montré que les problèmes fondamentaux relatifs à l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

pouvaient être posés et résolus pour un grand nombre d'équations linéaires et non linéaires. En particulier, je me suis arrêté assez longuement sur l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = ke^u \qquad (k > 0),$$

où k désigne une constante positive, équation qui se présente, comme on sait, dans plusieurs questions d'Analyse et de Géométrie. On peut supposer que le point (x, y), au lieu de rester sur un plan simple, se déplace sur une surface de Riemann. Les résultats auxquels je suis arrivé sont complets si la surface de Riemann est *ouverte*, c'est-à-dire si elle a un *bord*. J'avais cru pouvoir traiter aussi le cas d'une surface de Riemann *fermée*, sans insister, d'ailleurs, beaucoup sur ce problème spécial; mais, comme je l'ai indiqué ensuite [1], ce point de la

[1] *Voir* la rectification de la page 231 (*Journal de Mathématiques*, 1890).

théorie demandait à être repris. C'est l'étude de ce cas qui fait l'objet des pages qu'on va lire. Le théorème fondamental que je me propose d'établir peut être ainsi formulé :

Étant donnée une surface de Riemann à m feuillets, il existe une intégrale et une seule de l'équation

$$\Delta u = ke^u$$

jouissant des propriétés suivantes : elle est uniforme et continue sur la surface, sauf en des points donnés $O_1, O_2, \ldots, O_n$ et aux m points à l'infini sur chacun des feuillets. On suppose que l'on ait dans le voisinage de O_i

$$u = \beta_i \log r_i + v_i,$$

v_i étant continue en O_i, et r_i désignant la distance de (x, y) à O_i. Pour le point à l'infini sur le feuillet de rang k, imaginons qu'on le ramène à distance finie par une inversion; en l'appelant alors O'_k, on aura

$$u = \alpha_k \log r'_k + V_k,$$

V_k étant continue en O'_k, et r'_k désignant la distance du transformé de (x, y) au point O'_k.

Les constantes α et β sont données, et l'on suppose que

$$\beta_i > -2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$
$$\alpha_k > 2 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m + \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n < 0.$$

La démonstration de ce théorème est assez délicate. J'ai recours au procédé alterné employé avec tant de succès par M. Schwarz dans ses belles études sur l'équation de Laplace, mais les conditions d'application de cette méthode sont notablement différentes et des difficultés sérieuses se présentaient qui m'ont longtemps arrêté. Le point fondamental de la démonstration qui suit consiste dans cette idée que l'étude de l'équation

$$\Delta u = ke^u$$

est relativement facile au point de vue de l'application des méthodes d'approximations successives quand on considère seulement les intégrales qui restent supérieures (en valeur relative) à une certaine quantité fixe; l'important était alors de montrer qu'on pouvait s'arranger de manière à réaliser cette condition [1].

Je commence par considérer le cas où la surface de Riemann se réduit à un plan simple; l'examen du cas général ne présente plus ensuite aucune difficulté.

Le théorème énoncé plus haut est d'un grand intérêt pour la théorie des fonctions de M. Poincaré (fonctions fuchsiennes), mais c'est un sujet sur lequel je ne veux pas insister en ce moment, et pour lequel je renverrai seulement aux quelques indications que j'ai données dans mon Mémoire cité (Chap. IV, n° **7**).

I. — Cas du plan simple.

1. Nous commencerons par démontrer deux lemmes fondamentaux. Le premier seul exigera une démonstration un peu délicate. Soient u et v deux intégrales de l'équation

$$\Delta u = ke^u$$

continues à l'intérieur d'un cercle C de rayon R ayant l'origine pour centre. En posant

$$u - v = h,$$

on a la relation

$$\Delta h = ke^v(e^h - 1).$$

Portons donc notre attention sur les équations de la forme

$$(1) \qquad \Delta h = A(x, y)[e^h - 1],$$

$A(x, y)$ étant une fonction positive dans C, et supposons qu'on ait

---

[1] J'ai communiqué à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, 6 mars 1893) les points principaux du présent travail.

toujours dans ce domaine

$$A(x, y) > k_0,$$

k_0 étant une constante. Une intégrale de l'équation (1) continue dans C est déterminée par ses valeurs sur C; ceci revient à dire qu'une intégrale continue de l'équation (1) s'annulant sur la courbe C est identiquement nulle à l'intérieur, proposition dont la démonstration est bien facile. Ceci posé, supposons que la valeur absolue de notre intégrale h sur C soit au plus égale à un nombre M; nous voulons trouver une limite de la valeur absolue de h à l'intérieur de C pour un point situé à une distance R′ de l'origine (R′ < R).

Si nous désignons par H l'intégrale de (1) prenant sur C la valeur M, la fonction H sera positive dans C et l'on aura pour tout point de l'aire

$$h < \mathrm{H}.$$

Soit de même H′ l'intégrale de (1) prenant sur C la valeur — M, la fonction H′ sera négative dans C, et l'on aura pour tout point de l'aire

$$h > \mathrm{H}'.$$

Si nous trouvons une limite supérieure de H et de $|\mathrm{H}'|$, nous aurons une limite de $|h|$, comme nous le désirons.

Dans cette recherche, nous pouvons substituer à l'équation (1) l'équation

$$\Delta h = k_0(e^h - 1). \tag{2}$$

Si H_1 désigne l'intégrale de (1) prenant la valeur + M sur C, et si H_2 désigne l'intégrale de (2) prenant la même valeur sur C, on aura

$$\mathrm{H}_1 < \mathrm{H}_2.$$

Pour démontrer ce point essentiel, il suffit de remarquer que, s'il n'en était pas ainsi, on pourrait se placer (en fractionnant, s'il est nécessaire, l'aire en plusieurs autres) dans l'hypothèse

$$\mathrm{H}_1 > \mathrm{H}_2 \qquad \text{(à l'intérieur d'une courbe } \Gamma\text{)},$$

H_1 et H_2 prenant les mêmes valeurs sur Γ. Supposant, uniquement pour simplifier, que Γ coïncide avec la circonférence C, on aurait

$$H_1(x, y) = M - \int_C\int A(\xi, \eta)(e^{H_1(\xi,\eta)} - 1)G(\xi, \eta, x, y)\,d\xi\,d\eta,$$

$$H_2(x, y) = M - \int_C\int k_0(e^{H_2(\xi,\eta)} - 1)G(\xi, \eta, x, y)\,d\xi\,d\eta,$$

et ces deux égalités sont contradictoires avec

$$H_1 > H_2,$$

puisque on a, par hypothèse, $A(\xi, \eta) > k_0$.

2. Ces diverses remarques faites, nous avons donc à considérer l'équation

$$\Delta h = k_0(e^h - 1)$$

et à étudier l'intégrale de cette équation prenant sur C la valeur positive M. Nous sommes ramené ici à une équation à une seule variable, puisque dans l'équation et dans les données tout est symétrique autour de l'origine. En posant

$$\sqrt{x^2 + y^2} = r,$$

on a l'équation

$$(3) \qquad r\frac{d^2h}{dr^2} = -\frac{dh}{dr} + k_0 r(e^h - 1).$$

Il existe une intégrale de cette équation prenant pour $r = R$ et pour $r = -R$ la valeur M, et continue de $-R$ à $+R$. Cette intégrale se présente sous la forme d'une série ordonnée suivant les puissances de r^2. Désignons par M_0 la valeur de notre intégrale pour $r = 0$; on pourra calculer de proche en proche les coefficients du développement. Ce développement sera de la forme

$$h = M_0 + \frac{k_0}{4}r^2(e^{M_0} - 1) + \alpha_4 r^4 + \ldots + \alpha_{2n} r^{2n} + \ldots.$$

les α étant des polynômes en e^{M_0} et $e^{M_0}-1$ à coefficients positifs, contenant en facteur $e^{M_0}-1$. Pour une valeur donnée de k_0 (différente de zéro), le domaine de convergence de cette série dépendra de la quantité positive M_0. Il ne pourra que diminuer quand M_0 augmente; il est, d'ailleurs, facile de voir que la série ne convergera pas pour toute valeur de r. On s'en convaincra en comparant l'équation (3) à l'équation

$$(4)\quad \frac{d^2h}{dr^2} = \mu k_0(e^h - 1) \qquad \left(\mu \text{ étant une constante inférieure à } \frac{1}{2}\right)$$

et en cherchant l'intégrale de cette équation telle que

$$h_0 = M_0, \qquad \left(\frac{dh}{dr}\right)_0 = 0 \qquad (\text{pour } r = 0).$$

Les coefficients dans ce second développement sont moindres que dans le premier, comme on le reconnaît de suite. D'ailleurs, le développement provenant de (4) ne converge pas pour toute valeur de r; il en est donc de même pour celui qui nous intéresse.

Revenons maintenant au développement de h, en y faisant successivement $r = R$ et $r = R'$ ($R' < R$). En appelant M et M′ les valeurs correspondantes de h, on aura

$$M = M_0 + \frac{k_0}{4} R^2 (e^{M_0} - 1) + \alpha_4 R^4 + \ldots,$$

$$M' = M_0 + \frac{k_0}{4} R'^2 (e^{M_0} - 1) + \alpha_4 R'^4 + \ldots.$$

Il est visible, comme nous le savions déjà, que

$$M' < M,$$

mais on peut aller plus loin, et *c'est pour nous un point capital*. Je dis qu'on pourra trouver un nombre q inférieur à *un*, tel que

$$M' < Mq.$$

En effet, d'après ce que nous venons de dire, M_0 ne devra pas dépasser une certaine valeur finie et qui est précisément celle pour laquelle la série qui représente M commence à diverger. Pour cette valeur limite de M_0 il n'y a pour notre inégalité aucune difficulté, puisque alors M est infini, tandis que M′ est fini. C'est la valeur limite $M_0 = 0$ qui seule pourrait donner naissance à une difficulté, car alors $M = M' = 0$; mais il suffit de regarder les développements de M et M′. Dans chaque terme M_0 est en facteur, et, ce facteur supprimé, il apparaît sans doute possible que le quotient

$$\frac{M'}{M}$$

est, même pour $M_0 = 0$, inférieur à un nombre moindre que l'unité. Tout ceci suppose, bien entendu,

$$k_0 \neq 0.$$

Le nombre q, plus petit que *un*, dépend de k_0 et tend nécessairement vers *un*, quand k_0 tend vers zéro.

3. On étudiera de la même manière l'intégrale de l'équation (2) prenant sur C la valeur $-M$, ou, ce qui revient au même, l'intégrale de l'équation

$$\Delta h = k_0(1 - e^{-h}),$$

prenant sur C la valeur $+M$. Sur le cercle C′ de rayon R′, cette intégrale prend une valeur M′, et l'on a

$$M' < Mq_1,$$

q_1 étant un nombre fixe inférieur à l'unité.

4. Les considérations que nous venons de développer nous permettent d'énoncer le premier lemme que nous avons en vue. Reprenons les deux intégrales u et v du n° **1**, telles que

$$|u - v| < M \qquad \text{(sur la circonférence C)}.$$

Supposons de plus que u *et* v *restent, à l'intérieur de l'aire, supérieurs* (*en valeur relative*) *à un nombre fixe* G. Dans l'équation le coefficient

$$A(x, y) \qquad \text{ou} \qquad ke^v$$

restera alors certainement supérieur à une constante fixe k_0. Tous les raisonnements faits plus haut trouveront donc leur application. On est ainsi conduit à l'énoncé suivant, qui suppose essentiellement $k \neq 0$:

Étant donné une constante G, *on peut trouver un nombre* q *plus petit que l'unité, tel que l'on ait l'inégalité*

$$|u - v| < Mq \qquad (\text{sur la circonférence } C'),$$

C' *étant une circonférence de rayon* $R' < R$, *concentrique à* C.

Telle est l'inégalité fondamentale pour notre objet, reliant les maxima de $|u - v|$ sur C et sur C'. On ne doit pas oublier que cet énoncé ne vise que les intégrales u et v telles que

$$u > G, \qquad v > G,$$

ces inégalités étant prises en valeur relative. Nous avons supposé que ces inégalités ont lieu à l'intérieur de l'aire limitée par C; on peut supposer dans l'énoncé qu'elles ont lieu seulement sur la circonférence, car alors il y aura un nombre $G' < G$ au-dessous duquel les intégrales ne descendront pas dans l'aire, et, par suite, on peut faire correspondre à G un nombre $q < 1$.

5. On peut, sans introduire aucune idée nouvelle, étendre ce théorème à des intégrales de l'équation

$$\Delta u = ke^u,$$

ayant à l'origine un point singulier logarithmique. Supposons que, dans le voisinage de l'origine O, la fonction u puisse se mettre sous la

forme

$$\beta \log r + c, \qquad \beta > -2,$$

la fonction c étant continue en O. Nous aurons pour v l'équation

$$\Delta v = kr^\beta e^v,$$

et, comme je l'ai montré (*loc. cit.*), on peut étudier cette équation avec la même facilité que l'équation initiale, pourvu que $\beta > -2$.

Tous les raisonnements faits plus haut pourront se répéter ici, avec peu de modifications, et les conclusions ne seront pas modifiées. Au lieu de l'équation (2), nous aurons à considérer ici une équation de la forme

$$\Delta h = k_0 r^\beta (e^h - 1),$$

k_0 étant toujours une constante, et, au lieu de l'équation (3), nous aurons

$$r \frac{d^2 h}{dr^2} = -\frac{dh}{dr} + k_0 r^{\beta+1}(e^h - 1).$$

Les intégrales de cette équation, continues pour $r = 0$, auront un développement de la forme

$$\Sigma A_{\lambda,\mu} r^{\lambda\beta+\mu},$$

λ et μ étant des entiers positifs, et tous les exposants $\lambda\beta + \mu$ étant positifs [1]. Il n'y a rien à changer alors à la marche des raisonnements faits ci-dessus, et *nous avons encore ici le lemme fondamental énoncé au numéro précédent*. Il est relatif aux intégrales u ayant en O l'infini logarithmique correspondant au coefficient β, et prenant sur la circonférence C des valeurs supérieures à G, en désignant par G une constante donnée.

6. Passons au second lemme qui est immédiat. Considérant un contour fermé quelconque C, ayant à son intérieur les points O_1,

[1] *Voir* pour ce point mes Notes : *Sur la forme des intégrales des équations différentielles du second ordre dans le voisinage de certains points critiques* (*Comptes rendus*, t. LXXXVII; 1878).

$O_2, \ldots, O_n$, j'envisage l'équation

$$\Delta v = k r_1^{\beta_1} r_2^{\beta_2} \ldots r_n^{\beta_n} e^v,$$

en désignant par $r_1, r_2, \ldots, r_n$ les distances du point (x, y) aux points $O_1, O_2, \ldots, O_n$.

Les constantes $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ sont supposées satisfaire aux inégalités

$$\beta_i > -2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Soit ε un nombre positif fixe aussi petit qu'on voudra. Si les valeurs d'une intégrale v continue à l'intérieur de C sont, sur ce contour, inférieures à un nombre convenable H, *on aura, à l'intérieur de l'aire,*

$$v = v' - \eta,$$

v' désignant la fonction harmonique qui prend sur C les mêmes valeurs que v, et η désignant une fonction positive qui est inférieure à ε.

Pour démontrer ce lemme, il suffit de poser

$$v = v' + \lambda.$$

On aura

$$(5) \qquad \Delta\lambda = k r_1^{\beta_1} r_2^{\beta_2} \ldots r_n^{\beta_n} e^{v'} e^{\lambda}.$$

La fonction λ est nulle sur C; elle est donc négative à l'intérieur de l'aire que limite C. Si, d'autre part, v' est moindre que H sur C, il en sera de même pour l'intérieur de l'aire; on peut donc prendre H suffisamment petit (en valeur relative) pour que $e^{v'}$ soit aussi petit qu'on voudra dans l'aire. La fonction λ qui satisfait à l'équation (5), et qui s'annule sur le contour, sera donc elle-même aussi petite qu'on voudra, et l'on aura bien, H étant pris convenablement,

$$-\lambda < \varepsilon,$$

ε étant une quantité positive donnée à l'avance.

7. Nous pouvons maintenant aborder la démonstration du théo-

rème fondamental. On veut démontrer l'existence d'une solution de l'équation

$$\Delta u = ke^u,$$

fonction bien déterminée de x et y, et en général continue, sauf en certains points donnés $O_1, O_2, \ldots, O_n$ et au point à l'infini. On suppose que dans le voisinage de O_i la fonction puisse se mettre sous la forme

$$\beta_i \log r_i + v_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

β_i étant une constante donnée, r_i désignant la distance du point (x, y) au point O_i et la fonction v_i étant continue en O_i.

Pour le point à l'infini, on suppose que, en posant $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, la fonction se mette sous la forme

$$-\alpha \log r + V,$$

V étant continue à l'infini et α désignant une constante donnée. Nous faisons les hypothèses

$$\beta_i > -2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$
$$\alpha > 2$$

et, de plus,

$$\alpha + \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n < 0.$$

8. Nous prenons deux cercles concentriques C et C′ de rayons R et R′ (R > R′), contenant à leur intérieur les points $O_1, O_2, \ldots, O_n$.

Toutes les fonctions u et v que nous allons considérer satisfont à l'équation

$$\Delta u = ke^u.$$

Indiquons d'abord la marche générale de la démonstration. Nous allons partir d'une première fonction u_1, définie dans C, ayant les singularités données en $O_1, O_2, \ldots, O_n$ et prenant sur C des valeurs comprises entre deux constantes G et H (H < G). Cette fonction u_1 prend certaines valeurs sur C′; on forme une fonction v_1 définie à l'extérieur de C′, ayant la singularité donnée à l'infini et prenant sur

C′ les mêmes valeurs que u_1. Cette fonction v_1 prend certaines valeurs sur C; on forme alors une fonction u_2, définie dans C, ayant aux points O les singularités données et prenant sur C les valeurs de v_1. On continue ainsi indéfiniment, ce qui donne les deux suites

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots,$$

$$v_1, \quad v_2, \quad \ldots, \quad v_n, \quad \ldots.$$

Nous allons établir que u_n et v_n tendent respectivement vers des limites u et v. A l'aide de ces deux limites, l'existence de la fonction cherchée se trouvera établie. En posant

$$u_1 = \beta_1 \log r_1 + \beta_2 \log r_2 + \ldots + \beta_n \log r_n + U_1,$$

la fonction U_1 satisfait à l'équation

$$\Delta U_1 = k r_1^{\beta_1} r_2^{\beta_2} \ldots r_n^{\beta_n} e^{U_1}.$$

Elle prend sur C des valeurs comprises entre

$$G = \beta_1 \log r_1 + \ldots + \beta_n \log r_n \quad \text{et} \quad H = \beta_1 \log r_1 + \ldots + \beta_n \log r_n.$$

D'après le second lemme, en désignant par V_1 la fonction harmonique continue dans C, prenant sur C les valeurs données au début (comprises entre G et H), et en désignant par $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ les fonctions harmoniques continues dans C prenant respectivement sur cette courbe les valeurs $\log r_1, \log r_2, \ldots, \log r_n$, on aura

$$U_1 = V_1 - \beta_1 \rho_1 - \beta_2 \rho_2 - \ldots - \beta_n \rho_n - \eta,$$

la fonction positive η étant moindre qu'un nombre ε donné à l'avance, si G et par suite H ont été pris assez petits. Il est facile d'avoir explicitement des expressions de $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$. En désignant par a_1 la distance de O_1 à l'origine, et en appelant O'_1 le conjugué de O_1 par rapport au cercle C, on a, pour un point arbitraire M, la fonction

$$\rho_1 = \log \frac{a_1 . MO'_1}{R}.$$

Avec cette expression, on voit de suite que la fonction u_1, *sur la circonférence* C′, aura les valeurs

$$V'_1 + \beta_1 \log \frac{R'}{R} + \beta_2 \log \frac{R'}{R} + \ldots + \beta_n \log \frac{R'}{R} - \eta' + \delta,$$

V'_1 et η' désignant les valeurs de V_1 et η sur la circonférence C′; quant à δ, elle représente une fonction dont la valeur absolue est moindre que tel nombre que l'on voudra *si le rayon* R *est assez grand et si le rapport* $\frac{R'}{R}$ *est suffisamment voisin de l'unité.*

On a maintenant à considérer la fonction v_1 définie à l'extérieur de C′, devenant infinie au point à l'infini, comme

$$-\alpha \log r,$$

et prenant sur C′ les mêmes valeurs que u_1. Pour obtenir la fonction v_1, on n'a qu'à faire une inversion qui ramènera à distance finie le point à l'infini. En appliquant une nouvelle fois le même lemme, on démontre sans aucune peine que la fonction v_1 *sur la circonférence* C est de la forme

$$\text{(E)} \qquad V''_1 + (\alpha + \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n) \log \frac{R'}{R} + \lambda,$$

λ désignant une expression dont la valeur *absolue* est inférieure à un nombre aussi petit qu'on voudra donné à l'avance, si l'on a pris G et H suffisamment petits en valeur relative ($G > H$), et si, d'ailleurs, comme il a été dit plus haut, R et R′ sont suffisamment grands, $\frac{R'}{R}$ étant assez voisin de l'unité. La fonction V''_1 reste comprise entre G et H.

Puisque

$$\alpha + \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n < 0$$

et que $\frac{R'}{R} < 1$, on conclut de l'expression (E) que la fonction u_2 sur la circonférence C est supérieure à H. Ceci est évident puisque

$$V''_1 > H$$

et que

$$(\alpha + \beta_1 + \ldots + \beta_n) \log \frac{R'}{R} > 0,$$

tandis que λ se trouve être aussi petit qu'on veut. Ainsi, on a

$$u_2 > H \qquad \text{(sur la circonférence C)}.$$

9. Nous venons de voir que u_2 sur la circonférence C est supérieure à H; elle pourra soit rester entre H et G, soit dépasser G. Si u_2 reste compris entre H et G, on pourra refaire, en partant de u_2 sur C, tous les raisonnements précédents et l'on arrivera à

$$u_3 > H.$$

Si u_2 ne reste pas toujours inférieur à G, la même conclusion subsiste *a fortiori;* la raison en est que, si l'on a deux intégrales continues u et v de l'équation

$$\Delta u = ke^u$$

satisfaisant *sur* C à l'inégalité $u > v$, elles satisferont à la même inégalité à l'*intérieur de* C.

Nous concluons de tout ce qui vient d'être dit que

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n, \quad \ldots$$

sont supérieures à H *sur la circonférence* C.

Ce point acquis, il en résulte qu'on peut fixer une certaine constante H′ à laquelle les v resteront toujours supérieures sur la circonférence C′; à ce nombre H′ on peut faire correspondre un nombre q plus petit que l'unité (d'après le premier lemme). Il est facile maintenant de démontrer l'existence d'une limite pour les u et les v. On a

$$|u_3 - u_2| \text{ sur C} < q \times \{|v_2 - v_1| \text{ sur C}'\},$$

d'après le premier lemme. Il est, d'ailleurs, immédiatement visible que

$$|v_2 - v_1| \text{ sur C}' < |u_2 - u_1| \text{ sur C}.$$

On aura donc

$$|u_3 - u_2| \text{ sur } C < q \times \{|u_2 - u_1| \text{ sur } C\}.$$

En désignant donc par g le maximum de

$$|u_2 - u_1| \text{ sur } C,$$

on aura

$$|u_3 - u_2| \text{ sur } C < g \cdot q,$$

et, par suite, de proche en proche,

$$|u_{n+1} - u_n| \text{ sur } C < g \cdot q^{n-1};$$

la convergence des u vers une limite et, par suite, celle des v résultent de suite de ces inégalités.

Nous avons donc une limite u définie dans C, et une limite v définie à l'extérieur de C'. Ces fonctions satisfont à l'équation proposée, et elles ont les singularités demandées. D'ailleurs

$$u = v \qquad \text{sur C et sur C'}.$$

Les deux fonctions coïncident alors dans la couronne comprise entre C et C'. *Avec ces deux fonctions, nous obtenons donc l'intégrale de l'équation*

$$\Delta u = ke^u$$

satisfaisant aux conditions énoncées dans le n° **7**.

II. — Cas d'une surface de Riemann.

10. Nous avons fait, dans ce qui précède, l'étude de l'équation

$$\Delta u = ke^u$$

sur le plan simple de Cauchy. Il n'y a aucune difficulté à étendre nos

conclusions au cas d'une surface de Riemann à m feuillets. Le problème est alors le suivant :

Trouver l'intégrale de cette équation uniforme et continue sur la surface, sauf en des points donnés $O_1, O_2, \ldots, O_n$ *et aux* m *points à l'infini sur chacun des feuillets.*

On suppose que l'on ait dans le voisinage de O_i

$$u = \beta_i \log r_i + v_i,$$

v_i étant continue en O_i et r_i désignant la distance (x, y) à O_i. Pour le point à l'infini sur le feuillet de rang k, imaginons qu'on le ramène à distance finie par une inversion; en l'appelant alors O'_k, on aura

$$u = \alpha_k \log r'_k + V_k,$$

V_k étant continue en O'_k, et r'_k représentant la distance du transformé de (x, y) au point O'_k.

Les constantes α et β sont données, et l'on suppose que

$$\beta_i > -2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$
$$\alpha_k > 2 \qquad (k = 1, 2, \ldots, m),$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m + \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_n < 0.$$

11. La démonstration se fera, pour ainsi dire, sans modification. On aura seulement à tracer d'abord m grandes circonférences C_1, $C_2, \ldots, C_m$ isolant les points à l'infini sur chacun des m feuillets. On commencera alors par déterminer une intégrale prenant des valeurs données sur $C_2, \ldots, C_m$ et devenant infinie de la manière indiquée en $O_1, O_2, \ldots, O_n$ et au point à l'infini sur le *premier* feuillet. Nos deux lemmes trouvent encore leur application; il faut seulement modifier un peu l'énoncé du second lemme (n° **6**). Désignons par φ une fonction harmonique uniforme sur la surface de Riemann, et ayant seulement des infinis logarithmiques en $O_1, O_2, \ldots, O_n$ et au point à l'infini sur le premier feuillet: les coefficients correspondants à $O_1, O_2, \ldots, O_n$

sont $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ et celui qui correspond au point à l'infini est par cela même déterminé. Au lieu de l'équation du n° **6**, c'est à l'équation

$$\Delta v = ke^f . e^v$$

que l'on appliquera le lemme mentionné. On passera de proche en proche aux différents feuillets en faisant disparaître successivement les bords $C_1, C_2, \ldots, C_m$ et l'on arrivera finalement à la fonction cherchée. Notre démonstration est alors complètement effectuée.

12. L'existence d'une intégrale de l'équation

$$\Delta u = ke^u \tag{6}$$

satisfaisant aux conditions du n° **10** est complètement établie par l'analyse qui précède. *Nous voulons montrer que cette intégrale est unique.*

Soient donc u et v deux intégrales continues pour tout point (x, y), sauf aux points $O_1, O_2, \ldots, O_n$ et aux points à l'infini sur les feuillets, où elles deviennent infinies de la manière indiquée. En posant

$$u - v = h,$$

nous avons

$$\Delta h = ke^v(e^h - 1). \tag{7}$$

Je vais, en premier lieu, montrer qu'il est impossible que l'on ait sur toute la surface de Riemann

$$h \geqq 0.$$

Faisons d'abord une remarque préliminaire. Soit u une intégrale de l'équation (6), se mettant dans le voisinage de l'origine sous la forme

$$u = \beta \log r + U \qquad (r = \sqrt{x^2 + y^2}),$$

U étant continue en O, et la constante β étant supérieure à -2. On aura

$$\Delta U = kr^\beta . e^U.$$

Les dérivées partielles $\frac{\partial U}{\partial x}$ et $\frac{\partial U}{\partial y}$ pourront n'être pas continues en O, mais il résulte aisément de leurs expressions sous forme d'intégrales doubles, qu'elles pourront, dans le voisinage de l'origine, se mettre sous la forme

$$M.r^{\beta+1},$$

M restant fini quand r tend vers zéro.

Ceci posé, décrivons autour de $O_1, O_2, \ldots, O_n$ des cercles de petit rayon et considérons, d'autre part, des circonférences de très grand rayon isolant les points à l'infini sur les feuillets. On aura, d'après l'équation (7),

$$(8) \qquad \int\int \Delta h\, dx\, dy = k \int\int e^{v}(e^{h}-1)\, dx\, dy,$$

l'intégrale double étant étendue à l'aire limitée par les circonférences précédentes; mais

$$\int\int \Delta h\, dx\, dy = -\int \frac{dh}{dn}\, ds,$$

l'intégrale curviligne dans le second membre étant une somme d'intégrales prises le long des différentes circonférences. Or, si l'on considère le cercle de rayon O_1, et qu'on appelle ρ son rayon, on aura, d'après la remarque faite plus haut,

$$\frac{dh}{dn}\, ds = M\rho^{\beta+2}\, d\theta.$$

M restant finie; l'intégrale curviligne tendra donc vers zéro avec ρ, puisque $\beta + 2 > 0$. On reconnaît pareillement qu'il en est de même pour les cercles de rayon grandissant indéfiniment, et l'équation (8) devient ainsi

$$\int\int e^{v}(e^{h}-1)\, dx\, dy = 0,$$

l'intégrale double étant étendue à la surface de Riemann tout entière. Mais cette égalité est impossible si l'on suppose, comme nous l'avons

dit, que l'on ait sur toute la surface

$$h \geqq 0,$$

à moins que h ne soit identiquement nulle.

Il résulte de là que la différence $u - v$ doit changer de signe. La surface se trouve donc partagée en plusieurs régions (deux au moins) par la courbe

$$u - v = 0.$$

Soit R une des régions où la différence h soit, par exemple, positive. La fonction h s'annulera sur la courbe limitant R, et l'équation (7) donne alors

$$h(x, y) = -\int\int ke^{v(\xi,\eta)}(e^{h(\xi,\eta)} - 1)\,G(\xi, \eta, x, y)\,d\xi\,d\eta,$$

G étant la fonction de Green, relative au point (x, y), et l'intégrale double étant étendue à la région R. Cette relation est impossible, puisque le premier membre est positif, tandis que le second membre est visiblement négatif. Cette contradiction achève la démonstration du théorème.

Commentaire aux principes de la Thermodynamique [1];

PAR M. P. DUHEM.

DEUXIÈME PARTIE.

LE PRINCIPE DE SADI CARNOT ET DE R. CLAUSIUS.

CHAPITRE I.

LE CYCLE DE CARNOT ET LES MODIFICATIONS RÉVERSIBLES.

1. *Les modifications virtuelles.* — Revenons d'abord à la notion de modification virtuelle pour la préciser mieux que nous ne l'avons fait au cours de la première Partie.

Imaginons un système qui se trouve dans un état donné, ainsi que les corps étrangers à ce système. On connaîtra l'état de ce système, son mouvement et les actions extérieures qui agissent sur lui, si l'on connaît les valeurs des paramètres

$$\alpha, \quad \beta, \quad \ldots, \quad \lambda, \quad a, \quad b, \quad \ldots, \quad l$$

et des quantités

$$\frac{d\alpha}{dt}, \quad \frac{d\beta}{dt}, \quad \ldots, \quad \frac{d\lambda}{dt}.$$

[1] Voir t. VIII, p. 269.

Pour connaître les forces d'inertie qui agissent sur le système et les coefficients calorifiques du système, il faut, en outre, connaître la valeur de chacune des quantités

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}, \quad \frac{d^2\beta}{dt^2}, \quad \ldots, \quad \frac{d^2\lambda}{dt^2}.$$

Lorqu'on envisage non plus une modification réelle d'un système, mais une modification virtuelle, l'ordre dans lequel se succèdent les divers états du système n'existe que dans notre entendement et non point dans le temps; les quantités $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ ne peuvent plus être considérées comme des fonctions du temps. On ne peut donc plus parler des quantités

$$\frac{d\alpha}{dt}, \quad \frac{d\beta}{dt}, \quad \ldots, \quad \frac{d\lambda}{dt},$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}, \quad \frac{d^2\beta}{dt^2}, \quad \ldots, \quad \frac{d^2\lambda}{dt^2}.$$

Il semble donc qu'il ne soit plus permis de parler de forces d'inertie ou de coefficients calorifiques pour un système qui subit une modification virtuelle.

En réalité, on peut conserver à ces mots une signification.

Dans les formules qui définissent les forces d'inertie et les coefficients calorifiques d'un système en voie de transformation réelle, remplaçons les quantités

$$\frac{d\alpha}{dt}, \quad \frac{d\beta}{dt}, \quad \ldots, \quad \frac{d\lambda}{dt},$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}, \quad \frac{d^2\beta}{dt^2}, \quad \ldots, \quad \frac{d^2\lambda}{dt^2}$$

par des grandeurs

$$u, \quad v, \quad \ldots, \quad w,$$

$$u', \quad v', \quad \ldots, \quad w'$$

quelconques, assujetties seulement aux restrictions que la définition

même du système peut imposer aux quantités

$$\frac{d\alpha}{dt}, \quad \frac{d\beta}{dt}, \quad \ldots, \quad \frac{d\lambda}{dt},$$
$$\frac{d^2\alpha}{dt^2}, \quad \frac{d^2\beta}{dt^2}, \quad \ldots, \quad \frac{d^2\lambda}{dt^2};$$

nous aurons de nouvelles expressions qui représenteront, par définition, les forces d'inertie et les coefficients calorifiques du système au cours d'une modification virtuelle; nous pourrons alors parler du *travail effectué par les forces d'inertie* et de la *quantité de chaleur dégagée* par le système au cours d'une modification virtuelle.

Les quantités u, v, ..., w doivent varier d'une manière continue au cours de la transformation virtuelle; au contraire, les quantités u', v', ..., w' peuvent présenter des discontinuités.

2. *Des cycles.* — Rappelons la définition d'un cycle fermé, déjà indiquée dans la première Partie de ce travail (Chap. II, n° **1**).

Imaginons qu'un système parte d'un état initial défini par des valeurs

$$\alpha_0, \quad \beta_0, \quad \ldots, \quad \lambda_0, \quad a_0, \quad b_0, \quad \ldots, \quad l_0$$

des paramètres

$$\alpha, \quad \beta, \quad \ldots, \quad \lambda, \quad a, \quad b, \quad \ldots, \quad l;$$

son mouvement initial est défini par les valeurs

$$u_0, \quad v_0, \quad \ldots, \quad w_0$$

des vitesses

$$u, \quad v, \quad \ldots, \quad w.$$

Ce système subit une série de modifications *réelles* ou *virtuelles* durant lesquelles les paramètres

$$\alpha, \quad \beta, \quad \ldots, \quad \lambda, \quad a, \quad b, \quad \ldots, \quad l$$

et les vitesses

$$u, \quad v, \quad \ldots, \quad w$$

varient d'une manière continue.

Il parvient à un état final dans lequel les quantités variables

$$\alpha, \quad \beta, \quad \ldots, \quad \lambda, \quad a, \quad b, \quad \ldots, \quad l, \quad u, \quad v, \quad \ldots, \quad w$$

ont des valeurs

$$\alpha_1, \quad \beta_1, \quad \ldots, \quad \lambda_1, \quad a_1, \quad b_1, \quad \ldots, \quad l_1, \quad u_1, \quad v_1, \quad \ldots, \quad w_1.$$

Si les quantités

$$\alpha_1, \quad \beta_1, \quad \ldots, \quad \lambda_1, \quad a_1, \quad b_1, \quad \ldots, \quad l_1, \quad u_1, \quad v_1, \quad \ldots, \quad w_1$$

sont respectivement égales aux quantités

$$\alpha_0, \quad \beta_0, \quad \ldots, \quad \lambda_0, \quad a_0, \quad b_0, \quad \ldots, \quad l_0, \quad u_0, \quad v_0, \quad \ldots, \quad w_0,$$

on dit que le système a décrit un *cycle fermé* ou simplement un *cycle*.

Si toutes les modifications qui composent un cycle sont des modifications réelles, le cycle est lui-même *réel;* si toutes les modifications qui composent un cycle, ou seulement une partie d'entre elles, sont virtuelles, le cycle est lui-même *virtuel*.

3. *Un cycle réel peut se reproduire indéfiniment.* — C'est ici le lieu d'énoncer une hypothèse qui joue un rôle fondamental dans la constitution de la Thermodynamique :

Hypothèse. — *Soit* S *un système et soit* Σ *l'ensemble des corps étrangers à ce système. Imaginons deux intervalles de temps égaux, l'un compris entre les instants* t_0 *et* t_1, *l'autre compris entre les instants* t'_0 *et* t'_1. *Supposons les conditions suivantes réalisées :*

1° *En deux instants correspondants quelconques des intervalles* (t_0, t_1) *et* (t'_0, t'_1), *le système* Σ *est dans le même état.*

2° *Aux instants* t_0 *et* t'_0, *le système* S *est dans le même état et animé des mêmes vitesses.*

Nous admettrons que, dans ces conditions, en deux instants correspondants quelconques des intervalles (t_0, t_1) *et* (t'_0, t'_1), *le système* S *est dans le même état.*

Cette hypothèse peut s'énoncer sous une forme moins précise peut-être, mais plus brève, en disant que :

La modification subie par le système S *dans l'intervalle de temps* (t_0, t_1) *est déterminée si l'on connaît :* 1° *l'état des corps extérieurs* Σ *à tout instant de l'intervalle* (t_0, t_1); 2° *l'état et les vitesses du système* S *à l'instant* t_0.

Nous ajouterons qu'à l'instant t_0 l'état des systèmes Σ et S peut être défini seulement aux variables près qui fixent la position absolue dans l'espace de l'ensemble de ces deux systèmes.

Considérons un cycle fermé réellement, décrit par le système S. Pendant le parcours de ce cycle fermé, les corps extérieurs Σ ont passé par une suite d'états. A la fin de ce cycle, le système S a repris le même état et les mêmes vitesses qu'au début. Lorsque ce cycle a achevé d'être décrit, faisons reprendre de nouveau aux corps Σ la suite d'états par laquelle ils ont passé durant le parcours de ce cycle. D'après l'hypothèse précédente, le système S décrira de nouveau le cycle.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Un cycle fermé réel peut être indéfiniment reproduit identique à lui-même POURVU QUE L'ON PUISSE DISPOSER ARBITRAIREMENT DES CORPS EXTÉRIEURS AU SYSTÈME.

4. *Modifications adiabatiques, exothermiques, endothermiques.* — Considérons un système qui subit une modification infiniment petite, réelle ou virtuelle, sous l'influence de certains autres systèmes. Par l'effet de cette transformation, le système dégage une quantité de chaleur dQ; les forces d'inertie (Ire Partie, Chap. III, n° 5) effectuent un travail $d\tau$. Si la quantité

$$(1) \qquad d\mathfrak{Q} = dQ - \frac{1}{E}\, d\tau$$

est égale à 0, *la modification infiniment petite considérée est dite adiabatique.*

Une modification finie est dite adiabatique si toutes les modifications infiniment petites qui la composent sont adiabatiques.

Posons

$$(2) \qquad \mathfrak{Q} = Q - \frac{\tau}{E},$$

Q étant la quantité de chaleur dégagée dans une modification et τ le travail des forces d'inertie durant cette modification.

Nous donnerons à la quantité Q le nom d'*effet calorifique total de la modification*.

Nous voyons sans peine que l'effet calorifique total d'une modification adiabatique est toujours égal à o. La réciproque de cette proposition n'est pas exacte. L'effet calorifique total d'une modification finie peut être égal à o, sans que l'effet calorifique de chacune des modifications élémentaires qui composent cette modification finie soit égal à o, et, partant, sans que la modification finie soit adiabatique.

Selon que l'effet calorifique total d'une modification sera *positif*, *nul* ou *négatif*, la modification sera dite *exothermique*, *athermique* ou *endothermique*.

Ce que nous venons de dire s'applique aussi bien aux modifications virtuelles qu'aux modifications réelles; pour une modification réelle infiniment petite, nous avons

$$d\tau = -d\mathfrak{T},$$

$\mathfrak{T}$ étant la force vive du système. L'effet calorifique total d'une modification finie et *réelle* est donc défini par l'égalité

$$(2\,bis) \qquad \mathfrak{Q} = Q + \frac{1}{E}(\mathfrak{T}_1 - \mathfrak{T}_0),$$

$\mathfrak{T}_0$ étant la valeur de la force vive du système au début de la modification et $\mathfrak{T}_1$ la valeur de la même force vive à la fin de la modification.

Considérons un cycle.

L'effet calorifique de chacune des modifications élémentaires qui constituent ce cycle est défini par l'égalité

$$d\mathfrak{Q} = dQ - \frac{1}{E}\,d\tau,$$

qui peut encore s'écrire [Ire Partie, Chap. III, *Égalité* (16)]

$$E\,d\mathfrak{Q} = d\mathfrak{T} - E\,dU.$$

En intégrant cette égalité pour le cycle tout entier, et en remarquant que l'énergie interne U du système reprend, à la fin du cycle, la même valeur qu'au commencement, nous trouvons

$$(3) \qquad E\mathfrak{Q} = \mathfrak{T}.$$

L'effet calorifique total d'un cycle fermé, réel ou virtuel, est équivalent au travail total effectué, durant le parcours du cycle, par toutes les actions extérieures qui agissent sur le système.

Ce théorème nous sera utile au Chapitre suivant.

5. *Modifications isothermiques. Cycle de Carnot.* — On peut fort bien imaginer qu'un système, en chacun des états qu'il traverse au cours d'une modification, ait, en tous ses points, la même température $\mathfrak{T}$, lue sur un thermomètre quelconque; cette température peut d'ailleurs varier de l'un des états traversés dans cette modification à l'état suivant.

Lorsque la température est la même non seulement en tous les points du système pris dans chacun des états dont la suite constitue une modification réelle ou virtuelle, mais encore dans tous les états de cette suite, la modification est dite *isothermique*.

Imaginons un cycle soumis aux conditions suivantes :

1° Ce cycle est composé exclusivement de modifications adiabatiques et de modifications isothermiques;

2° Les modifications isothermiques qui figurent dans ce cycle sont toutes relatives à deux températures différentes, $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$, $\mathfrak{T}'$ étant supérieur à $\mathfrak{T}$.

Un tel cycle se nomme *cycle de Carnot décrit entre les températures* $\mathfrak{T}$ *et* $\mathfrak{T}'$.

D'après cette définition, un cycle de Carnot peut être réel ou virtuel.

Si un même système décrit successivement plusieurs cycles de Carnot, identiques ou non, mais entre les mêmes températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$, il est évident, d'après la définition précédente, que l'ensemble de ces cycles peut être regardé comme un cycle de Carnot unique, décrit entre les températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$.

Soient $C_1, C_2, \ldots, C_n$ ces cycles de Carnot successifs. Soit Γ le cycle de Carnot formé par leur ensemble.

Soient $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots, \mathfrak{Q}_n$ l'effet calorifique total des modifications produites à la température $\mathfrak{T}$ dans chacun des cycles $C_1, C_2, \ldots, C_n$; soit χ l'effet calorifique total des modifications produites à la température $\mathfrak{T}$ dans le cycle Γ.

Soient, de même, $\mathfrak{Q}'_1, \mathfrak{Q}'_2, \ldots, \mathfrak{Q}'_n$ l'effet calorifique total des modifications produites à la température $\mathfrak{T}'$ dans chacun des cycles $C'_1, C'_2, \ldots, C'_n$; soit χ' l'effet calorifique total des modifications produites à la température $\mathfrak{T}'$ dans le cycle Γ.

Nous aurons évidemment

$$(4)\qquad \begin{cases} \chi = \mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}_2 + \ldots + \mathfrak{Q}_n, \\ \chi' = \mathfrak{Q}'_1 + \mathfrak{Q}'_2 + \ldots + \mathfrak{Q}'_n. \end{cases}$$

6. *Modifications simultanées indépendantes. Généralisation du cycle de Carnot.* — Soit un système complexe σ, formé par un certain système S et par des corps Σ étrangers à ce système. Ce système σ est isolé dans l'espace. Pendant le temps compris entre les instants t_0, t_1, le système S éprouve une certaine modification M.

Soit, de même, un système complexe σ', formé par un certain système S′ et par des corps Σ' étrangers à ce système. Ce système σ' est isolé dans l'espace. Pendant le temps compris entre les instants t'_0, t'_1, le système S′ éprouve une modification M′.

Supposons que l'on ait

$$t_1 - t_0 = t'_1 - t'_0.$$

Imaginons maintenant qu'à un instant quelconque τ_0, on place, dans l'espace, le système σ dans l'état et avec les vitesses qu'il présentait à l'instant t_0, le système σ' dans l'état et avec les vitesses qu'il pré-

sentait à l'instant t_0, ces deux systèmes σ, σ' étant infiniment éloignés l'un de l'autre.

Nous admettrons l'hypothèse suivante :

Hypothèse. — *Chacun des deux systèmes σ, σ' se modifiera comme s'il était isolé dans l'espace.*

Si l'on combine cette hypothèse avec l'hypothèse énoncée au n° 3, on voit sans peine que, *dans un intervalle de temps*

$$\tau_1 - \tau_0 = t_1 - t_0 = t'_1 - t'_0,$$

le système S *éprouvera précisément la modification* M *et le système* S′ *la modification* M′.

Nous dirons alors que *les modifications* M *et* M′ *sont effectuées d'une manière simultanée et indépendante.*

On voit sans peine, en vertu des principes posés dans la première Partie de ce travail, que la quantité de chaleur dégagée par le système complexe (S, S′) pendant l'intervalle de temps (τ_0, τ_1) est la somme de la quantité de chaleur dégagée par le système S subissant, en l'absence du sytème σ', la modification M, et de la quantité de chaleur dégagée par le système S′ subissant, en l'absence du système σ, la modification M′. Des propositions analogues peuvent s'énoncer du travail effectué par les actions que le système (S, S′) subit de la part des corps étrangers (Σ, Σ'); du travail des forces d'inertie appliquées au système (S, S′); enfin de l'effet calorifique total de l'ensemble des deux modifications M, M′.

Si deux cycles fermés C, C_1 sont décrits simultanément et d'une manière indépendante par deux systèmes S et S_1, le système (S, S_1) décrit évidemment un cycle fermé.

Supposons que les deux cycles C et C_1 soient deux cycles de Carnot décrits entre les mêmes températures ϑ et ϑ'. Si l'isotherme décrite par le système S à la température ϑ et l'isotherme décrite par le système S_1 à la même température ϑ sont simultanées; si, de même, les isothermes que les systèmes S et S_1 décrivent à la température ϑ' sont simultanées, le système (S, S_1), lui aussi, décrira un cycle de Carnot

entre les températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$. En dehors de ce cas, le cycle fermé décrit par le système (S, S_1) ne sera pas, en général, un cycle de Carnot.

Néanmoins, *par une extension du mot cycle de Carnot, nous conviendrons de dire qu'un système complexe* (S, S_1) *décrit un cycle de Carnot* Γ *entre les températures* $\mathfrak{T}$ *et* $\mathfrak{T}'$, *si les deux systèmes infiniment éloignés* S, S_1, *dont il se compose, décrivent, entre les mêmes températures* $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$, *deux cycles de Carnot simultanés et indépendants* C, C_1.

Soient $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}_1$ les valeurs de l'effet calorifique total des modifications décrites à la température $\mathfrak{T}$ dans chacun des deux cycles C, C_1. Soient, de même, $\mathfrak{Q}'$, $\mathfrak{Q}'_1$, les valeurs de l'effet calorifique total des modifications décrites à la température $\mathfrak{T}'$ dans chacun des deux cycles C, C_1.

Par définition, nous dirons que la quantité

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}_1 \tag{5}$$

est l'effet calorifique total des modifications produites à la température $\mathfrak{T}$ dans le cycle Γ; et que la quantité

$$\mathfrak{L}' = \mathfrak{Q}' + \mathfrak{Q}'_1 \tag{5 bis}$$

est l'effet calorifique total des modifications produites à la température $\mathfrak{T}'$ dans le cycle Γ.

Naturellement, le nom de cycle de Carnot décrit entre les températures $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$ s'étendrait également à l'ensemble de n cycles de Carnot simultanés, indépendants, décrits entre les températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$.

7. *Des modifications qui sont une suite d'états d'équilibre.* — Lorsqu'un système est en équilibre dans un certain état, il persiste indéfiniment dans cet état, il ne se transforme pas, il semble donc qu'on ne peut, sans contradiction, parler de *modification réelle formée par une suite d'états d'équilibre;* en réalité, on peut donner à ces mots un sens logique.

Un état du système est défini, rappelons-le, par la connaissance des

quantités

$$\alpha, \quad \beta, \quad \ldots, \quad \lambda, \quad a, \quad b, \quad \ldots, \quad l,$$
$$\frac{d\alpha}{dt}, \quad \frac{d\beta}{dt}, \quad \ldots, \quad \frac{d\lambda}{dt}.$$

Considérons un système qui subit une transformation réelle. A un instant t de cette transformation, ce système est dans un état bien déterminé; les paramètres analogues à α, β, ..., λ, a, b, ..., l, qui définissent les propriétés des corps étrangers qui agissent sur le système, ont également des valeurs bien déterminées. Imaginons qu'à partir de l'instant t, on maintienne invariables ces dernières valeurs, en sorte que *les propriétés des corps étrangers au système demeurent indéfiniment ce qu'elles sont à l'instant t*. Si, par suite de cette opération, le système persiste, lui aussi, dans l'état qu'il présentait à l'instant t, nous dirons qu'à cet instant t, il était en équilibre sous l'action des corps étrangers en présence desquels il se trouvait.

Or il serait évidemment impossible que les valeurs prises par les quantités

$$\alpha, \quad \beta, \quad \ldots, \quad \lambda, \quad a, \quad b, \quad \ldots, \quad l,$$
$$\frac{d\alpha}{dt}, \quad \frac{d\beta}{dt}, \quad \ldots, \quad \frac{d\lambda}{dt},$$

à l'instant t conviennent encore à ces quantités pour tout instant postérieur à t, si l'on n'avait

$$\frac{d\alpha}{dt} = 0, \qquad \frac{d\beta}{dt} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{d\lambda}{dt} = 0.$$

Ainsi, pour qu'un certain état d'un système qui subit une transformation réelle puisse être dit état d'équilibre de ce système, il est nécessaire, mais non suffisant, que toutes les vitesses des divers points du système soient nulles dans cet état.

De cette proposition se conclut cette autre :

Considérons un système qui subit une modification réelle; peut-il se faire que l'état présenté par ce système à chaque instant puisse être regardé comme susceptible de devenir un état d'équilibre du système sous l'action des corps étrangers en présence desquels il se trouve, si

ces derniers conservaient indéfiniment les propriétés qu'ils possèdent au même instant? Pour cela, il est nécessaire, mais non suffisant, que l'on ait, pendant toute la durée de cette modification,

$$\frac{d\alpha}{dt} = 0, \qquad \frac{d\beta}{dt} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{d\lambda}{dt} = 0,$$

ou, en d'autres termes,

$$\alpha = \text{const.}, \qquad \beta = \text{const.}, \qquad \ldots, \qquad \lambda = \text{const.}$$

Cette proposition peut s'énoncer abréviativement de la manière suivante :

Pour qu'une modification réelle soit une succession d'états d'équilibre, il est nécessaire, mais non suffisant, que tous les points du système gardent une position invariable dans l'espace pendant toute la durée de cette modification.

Or est-il absurde d'admettre l'existence d'une modification durant laquelle tous les points du système gardent une position invariable? Évidemment non; on est parfois amené, en Physique, à imaginer de semblables modifications. Prenons, par exemple, un récipient renfermant un mélange d'hydrogène et de chlore; la combinaison se produit; une modification, un changement d'état a lieu; cependant, on peut fort bien admettre que la matière qui remplissait chacun des éléments de volume du récipient au début de la combinaison est demeurée dans le même élément de volume pendant toute la durée de la modification.

Les réserves que nous venons de faire ne portent que sur les modifications *réelles;* au cours d'une modification *virtuelle,* les valeurs de $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$, ne peuvent être regardées comme des fonctions du temps, en sorte que le raisonnement précédent ne s'applique plus. Il est bien vrai que si une modification virtuelle est une suite d'états d'équilibre, on doit avoir, pendant toute la modification,

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad \ldots, \qquad w = 0;$$

mais, comme on n'a pas

$$u = \frac{d\alpha}{dt}, \qquad v = \frac{d\beta}{dt}, \qquad \ldots, \qquad w = \frac{d\lambda}{dt},$$

ces égalités n'empêchent nullement les quantités α, β, ..., λ, de changer de valeur au cours d'une telle modification.

D'ailleurs, il est évident qu'une succession quelconque, mais continue, d'états d'équilibre d'un système peut toujours être envisagée comme formant une modification virtuelle de ce système.

8. *Des modifications réversibles.* — Nous arrivons maintenant à l'une des notions les plus importantes et en même temps les plus délicates à définir de toute la Thermodynamique : la notion de *transformation réversible*.

Considérons, pour un même système, deux transformations réelles ou virtuelles S et S'_1, douées des propriétés suivantes :

1° Chacun des états E de la transformation S correspond à un et un seul état E_1 de la transformation S_1;

2° Durant les transformations S et S_1, le système parcourt dans le même ordre les états qui se correspondent; en particulier, l'état initial de la transformation S correspond à l'état initial de la transformation S_1; l'état final de la transformation S correspond à l'état final de la transformation S_1;

3° A deux états E, E′, infiniment voisins en la modification S, correspondent deux états E_1, E'_1, infiniment voisins en la modification S_1;

4° Deux états correspondants E et E_1 présentent les propriétés suivantes :

a. Les paramètres α, β, ..., λ, a, b, ..., l, qui déterminent les propriétés du système dans l'état E, sont infiniment voisins des paramètres α_1, β_1, ..., λ_1, a_1, b_1, ..., l_1, qui déterminent les propriétés du système dans l'état E_1.

b. Les quantités $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\beta}{dt}$, ..., $\frac{d\lambda}{dt}$ (ou u, v, ..., w), qui déterminent les vitesses réelles (ou virtuelles) du système dans l'état E, diffèrent infiniment peu des quantités $\frac{d\alpha_1}{dt}$, $\frac{d\beta_1}{dt}$, ..., $\frac{d\lambda_1}{dt}$ (ou u_1, v_1, ..., w_1), qui

déterminent les vitesses réelles (ou virtuelles) du système dans l'état E_1.

c. Les quantités $\frac{d^2\alpha}{dt^2}, \frac{d^2\beta}{dt^2}, \ldots, \frac{d^2\lambda}{dt^2}$ (ou $u', v', \ldots, w'$), qui déterminent les accélérations (réelles ou virtuelles) du système dans l'état E, diffèrent infiniment peu des quantités $\frac{d^2\alpha_1}{dt^2}, \frac{d^2\beta_1}{dt^2}, \ldots, \frac{d^2\lambda_1}{dt^2}$ (ou $u_1, v_1, \ldots, w_1$), qui déterminent les accélérations réelles (ou virtuelles) du système dans l'état E_1.

d. Les paramètres analogues à $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, a, b, \ldots, l$, qui déterminent les propriétés des corps extérieurs agissant sur le système, pendant qu'il se trouve dans l'état E, diffèrent infiniment peu des paramètres analogues à $\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, a_1, b_1, \ldots, l_1$, qui déterminent les propriétés des corps extérieurs agissant sur le système pendant qu'il se trouve dans l'état E_1.

De ces conditions relatives aux deux états E et E_1, il résulte que la force vive, les actions extérieures, les forces d'inertie, les coefficients calorifiques ont des valeurs infiniment peu différentes pour le système pris dans l'état E ou dans l'état E_1.

Les deux transformations S et S_1, dont nous venons de fixer les propriétés, constituent deux *transformations infiniment voisines*. Nous donnerons le nom de *transformation variable d'une manière continue* à une suite de transformations dont chacune est infiniment voisine de celle qui la précède et de celle qui la suit.

Soit Σ une transformation réelle ou virtuelle d'un système, cette transformation jouissant des propriétés suivantes :

1° Dans chacun des états qui la constituent, le système est en équilibre sous l'action des corps extérieurs en présence desquels il se trouve;

2° Si la modification est virtuelle, les quantités $u, v, \ldots, w$ et u', $v', \ldots, w'$, sont supposées nulles dans tout son parcours;

3° Soient (A) l'état initial et (B) l'état final de la transformation Σ; de (A) à (B), on peut passer par une transformation variable d'une manière continue, *réalisable* sous chacune de ses formes, et ayant pour forme limite la transformation *réelle ou virtuelle* Σ;

4° De (B) en (A), on peut passer par une transformation S′ variable d'une manière continue, *réalisable* sous chacune de ses formes,

et ayant pour forme limite la transformation *réelle ou virtuelle* que l'on obtient en parcourant la suite d'états d'équilibre Σ, en ordre inverse, de (B) en (A).

Une semblable transformation Σ se nomme une *transformation réversible*.

Une transformation réversible est-elle réalisable? Une transformation réversible étant une succession d'états d'équilibre, nous savons qu'il sera impossible de la réaliser, sauf peut-être dans un cas particulier que nous avons précisé au numéro précédent. Ainsi, en général, *une transformation réversible est une transformation purement virtuelle.*

On pourrait même se demander s'il est possible de constituer des modifications virtuelles qui soient réversibles; à cette question, nous répondrons en admettant l'hypothèse suivante :

Hypothèse fondamentale. — *Il existe des systèmes pour lesquels toute modification, réelle ou virtuelle, qui est une suite continue d'états d'équilibre, est une modification réversible.*

Nous n'étudierons que les systèmes qui jouissent de cette propriété.

Il faut bien se garder de croire que ces systèmes-là existent seuls dans la nature; il est aisé de prouver le contraire; les cycles d'*hysteresis magnétique*, par exemple, sont des modifications non réversibles, bien que ce soient des suites continues d'états d'équilibre.

Établissons quelques propriétés des modifications réversibles qui nous seront utiles par la suite.

Si une modification réversible est réelle, comme elle est une succession d'états d'équilibre, on a, pendant toute la durée de cette modification,

$$\frac{d\alpha}{dt} = 0, \qquad \frac{d\beta}{dt} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{d\lambda}{dt} = 0;$$

on a donc aussi

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = 0, \qquad \frac{d^2\beta}{dt^2} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{d^2\lambda}{dt^2} = 0.$$

Si une modification réversible est virtuelle, par définition, on a, à chaque instant,

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad \ldots, \qquad w = 0,$$
$$u' = 0, \qquad v' = 0, \qquad \ldots, \qquad w' = 0.$$

Ainsi, *dans une modification réversible, réelle ou virtuelle, la force vive et les forces d'inertie sont constamment nulles.*

Soient A, B, ..., L, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, ..., $\mathfrak{L}$ les actions extérieures auxquelles le système est soumis pendant qu'il se trouve dans un des états qui constituent la modification réversible Σ. Si le système parcourt cette modification de l'état (A) à l'état (B), les actions extérieures effectueront un travail

$$\Theta = \int_{(A)}^{(B)} (A\,\delta\alpha + B\,\delta\beta + \ldots + L\,\delta\lambda + \mathfrak{A}\,\delta a + \mathfrak{B}\,\delta b + \ldots + \mathfrak{L}\,\delta l).$$

Si le système parcourt la même modification de (B) en (A), les actions extérieures effectueront un travail

$$\Theta' = \int_{(B)}^{(A)} (A\,\delta\alpha + B\,\delta\beta + \ldots + L\,\delta\lambda + \mathfrak{A}\,\delta a + \mathfrak{B}\,\delta b + \ldots + \mathfrak{L}\,\delta l).$$

Les deux intégrales sont prises le long du même trajet Σ, en sorte que l'on a évidemment

$$\Theta + \Theta' = 0.$$

Or, d'après la définition d'une transformation variable d'une manière continue, le travail $\mathfrak{T}$, effectué par les actions extérieures pendant que le système parcourt la modification réelle S, conduite de l'état (A) à l'état (B), a Θ pour limite lorsque la modification S tend vers la modification réversible Σ; le travail $\mathfrak{T}'$, effectué par les actions extérieures pendant que le système parcourt la modification réelle S′, conduite de l'état (B) à l'état (A), a Θ' pour limite lorsque la modification S′ tend vers la modification réversible Σ renversée.

Nous obtenons donc la proposition suivante :

S *et* S′ *étant deux modifications réelles variables d'une manière*

continue, inverses l'une de l'autre, qui ont pour limite commune une certaine modification réversible Σ, *les travaux* $\mathfrak{T}$ *et* $\mathfrak{T}'$, *effectués par les actions extérieures pendant que le système subit ces modifications, tendent vers des limites égales et de signe contraire lorsque les modifications* S *et* S′ *tendent vers la modification* Σ.

Il suffit, dans le raisonnement précédent, de remplacer les actions extérieures

$$A, \quad B, \quad \ldots, \quad L, \quad \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{B}, \quad \ldots, \quad \mathfrak{L}$$

par les coefficients calorifiques

$$R_\alpha, \quad R_\beta, \quad \ldots, \quad R_\lambda, \quad \mathfrak{R}_a, \quad \mathfrak{R}_b, \quad \ldots, \quad \mathfrak{R}_l;$$

les mots : *travail des actions extérieures*, par les mots : *quantité de chaleur dégagée par le système*, pour obtenir la proposition suivante :

Les quantités de chaleur Q *et* Q′, *dégagées par le système pendant qu'il subit les modifications* S *et* S′, *tendent vers des limites égales et de signe contraire lorsque les modifications* S *et* S′ *tendent vers la modification réversible* Σ.

Nous terminerons ces généralités sur les modifications réversibles par l'énoncé de deux hypothèses qui nous seront, par la suite, d'un grand usage.

Première hypothèse. — *Si une transformation réversible* Σ *est isothermique, elle peut être regardée comme la limite commune de deux transformations* S *et* S′, *inverses l'une de l'autre, variables d'une manière continue, constamment réelles et constamment isothermiques.*

Seconde hypothèse. — *Si une modification réversible* Σ *est adiabatique, elle peut être regardée comme la limite commune de deux transformations* S *et* S′, *inverses l'une de l'autre, variables d'une manière continue, constamment réelles et constamment adiabatiques.*

CHAPITRE II.

LE THÉORÈME DE CARNOT ET LA TEMPÉRATURE ABSOLUE.

1. *Les hypothèses de Clausius et de Sir W. Thomson.* — Soient $A, B, \ldots, L, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots, \mathcal{L}$ les forces et les influences extérieures qui agissent sur un système pris dans l'un des états dont la suite constitue un cycle de Carnot. Pendant une des modifications élémentaires

$$d\alpha, \quad d\beta, \quad \ldots, \quad d\lambda, \quad da, \quad db, \quad \ldots, \quad dl$$

en lesquelles le cycle peut se décomposer, ces actions effectuent un travail

$$d\mathfrak{T} = A\,d\alpha + B\,d\beta + \ldots + L\,d\lambda + \mathcal{A}\,da + \mathcal{B}\,db + \ldots + \mathcal{L}\,dl;$$

pendant le parcours du cycle entier, elles effectuent un travail

$$\mathfrak{T} = \int (A\,d\alpha + B\,d\beta + \ldots + L\,d\lambda + \mathcal{A}\,da + \mathcal{B}\,db + \ldots + \mathcal{L}\,dl),$$

l'intégrale s'étendant au cycle entier.

Ce travail $\mathfrak{T}$ peut être positif, nul ou négatif.

Les cycles de Carnot pour lesquels $\mathfrak{T}$ est nul et les cycles de Carnot pour lesquels $\mathfrak{T}$ est négatif sont l'objet de deux hypothèses dont l'une est due à Clausius et l'autre à Sir W. Thomson.

Hypothèse de Clausius. — *Si un système décrit un cycle de Carnot* réel *entre les températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$ ($\mathfrak{T}'$ étant supérieur à $\mathfrak{T}$); si les actions extérieures auxquelles ce système est soumis effectuent, dans le parcours du cycle, un travail total égal à* 0, *il n'est pas possible que la modification isothermique produite à la température $\mathfrak{T}$ soit endothermique, ni que la modification isothermique produite à la température $\mathfrak{T}'$ soit exothermique.*

Hypothèse de Sir W. Thomson. — *Si un système décrit un cycle*

de Carnot RÉEL *entre les températures* $\mathfrak{T}$ *et* $\mathfrak{T}'$ ($\mathfrak{T}'$ *étant supérieur à* $\mathfrak{T}$); *si les actions extérieures auxquelles le système est soumis effectuent, dans le parcours du cycle, un travail total négatif, il est impossible que la modification isothermique produite à la température* $\mathfrak{T}$ *soit endothermique.*

Ce n'est pas ici le lieu d'indiquer de quelle manière Clausius et Sir W. Thomson ont été amenés à énoncer ces hypothèses, ni de rappeler les discussions soutenues par Clausius contre les physiciens qui en niaient l'exactitude. Dans les Traités classiques de Thermodynamique, on donne ordinairement ces deux hypothèses comme équivalentes et comme également capables de servir de base à la démonstration de Carnot; pour nous, nous les regarderons comme distinctes et les emploierons toutes deux dans notre exposé.

2. *Addition aux hypothèses de Clausius et de Sir W. Thomson.* — A ces deux hypothèses, nous allons faire une addition essentielle, que nous énoncerons de la manière suivante :

HYPOTHÈSE ADDITIONNELLE. — *Si un cycle de Carnot, décrit entre les températures* $\mathfrak{T}$ *et* $\mathfrak{T}'$ ($\mathfrak{T}'$ *étant supérieur à* $\mathfrak{T}$), EST RÉEL ET N'EST PAS RÉVERSIBLE; *si, dans le parcours de ce cycle, les actions extérieures effectuent un travail nul ou négatif, la modification isothermique produite à la température* $\mathfrak{T}$ *ne peut pas être athermique.*

Combinée avec les hypothèses de Clausius et de Sir W. Thomson, cette hypothèse additionnelle fournit la proposition suivante :

Parmi tous les cycles de Carnot, décrits entre les températures $\mathfrak{T}$ *et* $\mathfrak{T}'$ ($\mathfrak{T}'$ *étant supérieur à* $\mathfrak{T}$), *qui sont* RÉELS ET NON RÉVERSIBLES, *considérons ceux durant le parcours desquels les actions extérieures effectuent un travail nul ou négatif; pour tous ces cycles, la modification isothermique produite à la température* $\mathfrak{T}$ *est exothermique.*

Les hypothèses que nous venons d'énoncer ne sont pas susceptibles d'une vérification expérimentale *directe*. Combinées avec d'autres

hypothèses, plus ou moins nombreuses, elles forment le point de départ des théories dont les conséquences éloignées peuvent seules être soumises au contrôle de l'expérience. Une remarque analogue s'appliquerait d'ailleurs à presque toutes les hypothèses que l'on rencontre en Physique.

3. *Diverses espèces de cycles de Carnot.* — Prenons tous les cycles de Carnot virtuels que l'on peut concevoir; parmi ces cycles, cherchons à distinguer tous ceux dont les propriétés sont compatibles d'une part avec le principe de la conservation de l'Énergie, d'autre part avec les trois hypothèses que nous venons d'indiquer.

Parmi tous les cycles de Carnot ainsi distingués se trouveront assurément tous ceux qui sont réalisables et non réversibles. Les propriétés qui appartiennent à tous les cycles ainsi distingués appartiendront en particulier à tous les cycles réalisables et non réversibles.

Jusqu'à nouvel ordre, nous excluons de nos recherches les cycles de Carnot réels, non réversibles, décrits entre les températures $\mathfrak{T}$ *et* $\mathfrak{T}'$, *correspondant à un travail positif des actions extérieures, et pour lesquels l'effet thermique produit à la température* $\mathfrak{T}$ *est égal à* 0.

Soient toujours $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$ les deux températures entre lesquelles est décrit un cycle de Carnot, $\mathfrak{T}'$ étant supérieur à $\mathfrak{T}$. Soient $\mathfrak{Q}$ l'effet calorifique total de la modification isothermique produite à la température $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{Q}'$ l'effet calorifique total de la modification isothermique produite à la température $\mathfrak{T}'$. Les modifications, autres que ces deux-là, dont se compose le cycle sont adiabatiques, en sorte que l'effet calorifique total du cycle se réduit à $(\mathfrak{Q}+\mathfrak{Q}')$.

Les actions extérieures auxquelles le système est soumis effectuent, pendant le parcours du cycle, un travail total $\mathfrak{T}$.

Le principe de la conservation de l'Énergie nous donne [Chap. I, égalité (3)]

$$\mathfrak{T} = \mathrm{E}(\mathfrak{Q}+\mathfrak{Q}'). \tag{1}$$

De là, les propriétés suivantes :

1° *Si le travail* $\mathfrak{T}$ *est nul, les deux quantités* $\mathfrak{Q}$ *et* $\mathfrak{Q}'$ *sont de signe contraire et de même valeur absolue;*

2° *Si le travail* $\mathfrak{T}$ *est positif, il y a au moins l'une des deux quantités* $\mathfrak{Q}$ *et* $\mathfrak{Q}'$ *qui est positive, et, s'il n'y en a qu'une, elle est la plus grande en valeur absolue;*

3° *Si le travail* $\mathfrak{T}$ *est négatif, il y a au moins l'une des deux quantités* $\mathfrak{Q}$ *et* $\mathfrak{Q}'$ *qui est négative, et, s'il n'y en a qu'une, elle est la plus grande en valeur absolue.*

Ces propositions résultent de l'application aux cycles de Carnot considérés du principe de la conservation de l'Énergie.

Appliquons-leur maintenant les deux hypothèses de Clausius et de Sir W. Thomson, énoncées au n° **1**, et l'hypothèse additionnelle, énoncée au n° **2**. Nous serons conduit à la conclusion suivante :

Si le travail externe est nul ou négatif, la quantité $\mathfrak{Q}$ est assurément positive; si le travail externe est positif, la quantité $\mathfrak{Q}$ est positive ou négative, mais n'est assurément pas nulle.

De ces propositions il est aisé de conclure que tout cycle de Carnot réalisable qui n'est pas uniquement une succession d'états d'équilibre rentre dans l'une des catégories de la classification suivante :

1° Le travail $\mathfrak{T}$ effectué par les actions extérieures est nul; $\mathfrak{Q}$ est positif; $\mathfrak{Q}'$ est négatif et égal à $\mathfrak{Q}$ en valeur absolue;

2° Le travail $\mathfrak{T}$ effectué par les actions extérieures est négatif; $\mathfrak{Q}$ est positif; $\mathfrak{Q}'$ est négatif et supérieur à $\mathfrak{Q}$ en valeur absolue;

3° Le travail $\mathfrak{T}$ effectué par les actions extérieures est positif, trois cas peuvent alors se distinguer :

a. $\mathfrak{Q}$ est positif; $\mathfrak{Q}'$ est positif ou nul;

b. $\mathfrak{Q}$ est positif; $\mathfrak{Q}'$ est négatif et inférieur à $\mathfrak{Q}$ en valeur absolue;

c. $\mathfrak{Q}$ est négatif; $\mathfrak{Q}'$ est positif et supérieur à $\mathfrak{Q}$ en valeur absolue.

Cette classification est résumée dans le Tableau suivant :

Cycles de premier genre : $\mathfrak{T} = 0$		$\mathfrak{Q} > 0$	$\mathfrak{Q}' < 0$
Cycles de deuxième genre : $\mathfrak{T} < 0$		$\mathfrak{Q} > 0$	$\mathfrak{Q}' < 0$
Cycles de troisième genre : $\mathfrak{T} > 0$	Espèce *a*....	$\mathfrak{Q} > 0$	$\mathfrak{Q}' \geqq 0$
	Espèce *b*....	$\mathfrak{Q} > 0$	$\mathfrak{Q}' < 0$
	Espèce *c*....	$\mathfrak{Q} < 0$	$\mathfrak{Q}' > 0$

Proposons-nous maintenant de comparer les valeurs que prend, pour ces différents cycles, le rapport

$$\rho = \frac{\mathcal{Q} + \mathcal{Q}'}{\mathcal{Q}}.$$

$(\mathcal{Q} + \mathcal{Q}')$ étant nul pour les cycles de premier genre, négatif pour les cycles de deuxième genre, positif pour les cycles de troisième genre, ainsi que le montre l'équation (2), on voit que le rapport ρ a, pour les diverses catégories de cycles, le signe suivant :

Cycles de premier genre		$\rho = 0$
Cycles de deuxième genre		$\rho < 0$
Cycles de troisième genre	Espèce a	$\rho > 0$
	Espèce b	$\rho > 0$
	Espèce c	$\rho < 0$

4. *Théorème de Carnot.* — L'inspection du Tableau précédent nous montre d'abord que le rapport ρ est plus petit pour un cycle quelconque de troisième genre et d'espèce c que pour un cycle quelconque de premier genre, et aussi que pour un cycle quelconque de troisième genre et d'espèce a ou d'espèce b.

Nous allons démontrer maintenant que, *si l'on considère deux cycles de Carnot, décrits entre les mêmes températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$, l'un de troisième genre et d'espèce c, l'autre de deuxième genre, le rapport ρ n'est assurément pas plus grand pour le premier que pour le second,* ces cycles étant supposés, bien entendu, soumis au principe de la conservation de l'Énergie et aux trois hypothèses précédemment énoncées.

Une démonstration rigoureuse de ce théorème exige que nous distinguions différents cas.

Soient C_1 le premier cycle et C_2 le second cycle. Soient T_1, T_2 les durées de ces deux cycles; nous commencerons par distinguer deux cas selon que les périodes T_1, T_2 sont ou ne sont pas commensurables.

1° *Le rapport $\frac{T_2}{T_1}$ est commensurable.*

Nous poserons

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \tag{2}$$

μ_1, μ_2 étant deux nombres entiers que nous pouvons supposer premiers entre eux.

Soient $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}'_1$, ρ_1 les quantités analogues à $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}'$, ρ, qui correspondent au cycle C_1; soient $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{Q}_2$, $\mathfrak{Q}'_2$, ρ_2 les quantités analogues à $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}'$, ρ, qui correspondent au cycle C_2. Nous savons que l'on a

$$\mathfrak{T}_1 > 0, \qquad \mathfrak{Q}_1 < 0, \qquad \mathfrak{Q}'_1 > 0,$$
$$\mathfrak{T}_2 < 0, \qquad \mathfrak{Q}_2 > 0, \qquad \mathfrak{Q}'_2 < 0.$$

Nous distinguerons deux cas secondaires, selon que les quantités $\mathfrak{T}_1$ et $|\mathfrak{T}_2|$ sont ou ne sont pas commensurables.

A. *Le rapport* $\frac{|\mathfrak{T}_2|}{\mathfrak{T}_1}$ *est commensurable.*

Nous poserons

$$\frac{|\mathfrak{T}_2|}{\mathfrak{T}_1} = \frac{m_2}{m_1}, \tag{3}$$

m_1, m_2 étant deux nombres entiers que nous pouvons supposer premiers entre eux.

Posons

$$\left\{\begin{aligned} N_1 &= m_2\mu_1, \\ N_2 &= m_2\mu_2. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

Considérons N_1 cycles identiques au cycle C_1, décrits simultanément et d'une manière indépendante. Leur ensemble formera un cycle de Carnot unique γ_1, dont la durée sera T_1, qui sera décrit entre les températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$, et pour lequel les quantités analogues à $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}'$ auront les valeurs [Chap. I, égalités (5) et (5 *bis*)]

$$N_1\mathfrak{T}_1, \quad N_1\mathfrak{Q}_1, \quad N_1\mathfrak{Q}'_1.$$

Le cycle γ_1 peut être reproduit μ_2 fois de suite (Chap. I, n° **5**).

Ces μ_2 cycles γ_1 successifs pourront être considérés comme un cycle de Carnot unique Γ_1, décrit entre les températures $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$, de durée

$$\Theta_1 = \mu_2 T_1, \tag{5}$$

et pour lequel les quantités analogues à $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}'$ auront pour valeurs

$$\mu_2 N_1 \mathfrak{T}_1, \quad \mu_2 N_1 \mathfrak{Q}_1, \quad \mu_2 N_1 \mathfrak{Q}'_1.$$

Considérons, d'autre part, N_2 cycles identiques au cycle C_2, décrits simultanément et d'une manière indépendante. Leur ensemble formera un cycle de Carnot unique γ_2, décrit entre les températures $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$, de durée T_2, et pour lequel les quantités analogues à $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}'$ auront les valeurs

$$N_2 \mathfrak{T}_2, \quad N_2 \mathfrak{Q}_2, \quad N_2 \mathfrak{Q}'_2.$$

Le cycle γ_2 peut être reproduit μ_1 fois de suite. Ces μ_1 cycles γ_2 successifs pourront être considérés comme un cycle de Carnot unique Γ_2, décrit entre les températures $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$, de durée

$$(5\ bis) \qquad \Theta_2 = \mu_1 T_2,$$

et pour lequel les quantités analogues à $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}'$ auront pour valeurs

$$\mu_1 N_2 \mathfrak{T}_2, \quad \mu_1 N_2 \mathfrak{Q}_2, \quad \mu_1 N_2 \mathfrak{Q}'_2.$$

Les égalités (2), (5) et (5 *bis*) nous apprennent que la durée Θ_1 du cycle Γ_1 est égale à la durée Θ_2 du cycle Γ_2; on peut donc supposer que l'on décrive ces deux cycles simultanément et d'une manière indépendante. Leur ensemble formera un nouveau cycle de Carnot *réel* Γ, décrit entre les températures $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$, et pour lequel les quantités analogues à $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}'$ auront pour valeurs

$$\begin{aligned}
\mathfrak{T} &= \mu_2 N_1 \mathfrak{T}_1 + \mu_1 N_2 \mathfrak{T}_2,\\
\mathfrak{Q} &= \mu_2 N_1 \mathfrak{Q}_1 + \mu_1 N_2 \mathfrak{Q}_2,\\
\mathfrak{Q}' &= \mu_2 N_1 \mathfrak{Q}'_1 + \mu_1 N_2 \mathfrak{Q}'_2.
\end{aligned}$$

En vertu des égalités (4), ces égalités peuvent s'écrire

$$(6) \qquad \left\{\begin{aligned}
\mathfrak{T} &= \mu_1 \mu_2 (m_2 \mathfrak{T}_1 + m_1 \mathfrak{T}_2),\\
\mathfrak{Q} &= \mu_1 \mu_2 (m_2 \mathfrak{Q}_1 + m_1 \mathfrak{Q}_2),\\
\mathfrak{Q}' &= \mu_1 \mu_2 (m_2 \mathfrak{Q}'_1 + m_1 \mathfrak{Q}'_2).
\end{aligned}\right.$$

En vertu de l'égalité (3), la première des égalités (6) devient

$$\mathfrak{T} = 0.$$

Le cycle Γ est donc un cycle *réel, non réversible,* de premier genre. D'après l'hypothèse de Clausius, indiquée au n° **1**, et l'hypothèse complémentaire, énoncée au n° **2**, la quantité $\mathfrak{Q}$ doit être positive; en vertu de la deuxième égalité (6), cette dernière condition devient

$$m_2 \mathfrak{Q}_1 + m_1 \mathfrak{Q}_2 > 0$$

ou bien

$$\frac{m_1}{|\mathfrak{Q}_1|} > \frac{m_2}{\mathfrak{Q}_2}.$$

Mais on a, d'après l'égalité (3),

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\mathfrak{T}_2}{|\mathfrak{T}_2|}.$$

On a donc

$$\frac{\mathfrak{T}_1}{|\mathfrak{Q}_1|} > \frac{|\mathfrak{T}_2|}{\mathfrak{Q}_2}$$

ou bien

$$\frac{\mathfrak{T}_1}{\mathfrak{Q}_1} < \frac{\mathfrak{T}_2}{\mathfrak{Q}_2}.$$

D'autre part, l'égalité (1) donne

$$\mathfrak{T}_1 = \mathrm{E}(\mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}'_1),$$
$$\mathfrak{T}_2 = \mathrm{E}(\mathfrak{Q}_2 + \mathfrak{Q}'_2).$$

L'inégalité précédente devient donc

$$\frac{\mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}'_1}{\mathfrak{Q}_1} < \frac{\mathfrak{Q}_2 + \mathfrak{Q}'_2}{\mathfrak{Q}_2}$$

ou

$$(7) \qquad \rho_1 < \rho_2.$$

B. *Le rapport* $\frac{|\mathfrak{T}_2|}{\mathfrak{T}_1}$ *est incommensurable.*

Soient m_1, m_2 deux nombres entiers, premiers entre eux, tels que l'on ait

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{|\mathfrak{T}_2|}{\mathfrak{T}_1} - \varepsilon, \tag{8}$$

ε étant une quantité positive que l'on peut prendre aussi petite que l'on veut.

Construisons le cycle Γ comme dans le cas précédent.

Nous aurons encore, pour ce cycle,

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{T} &= \mu_1\mu_2(m_2\mathfrak{T}_1 + m_1\mathfrak{T}_2), \\ \mathfrak{Q} &= \mu_1\mu_2(m_2\mathfrak{Q}_1 + m_1\mathfrak{Q}_2), \\ \mathfrak{Q}' &= \mu_1\mu_2(m_2\mathfrak{Q}'_1 + m_1\mathfrak{Q}'_2). \end{aligned}\right. \tag{6}$$

La première égalité (6), jointe à l'égalité (8), donne

$$\mathfrak{T} = -\varepsilon m_1\mu_1\mu_2\mathfrak{T}_1.$$

$\mathfrak{T}$ étant négatif, le cycle Γ est un cycle de Carnot *réel, non réversible*, de deuxième genre. L'hypothèse de Sir W. Thomson, énoncée au n° **1**, et l'hypothèse additionnelle, énoncée au n° **2**, nous apprennent que la quantité $\mathfrak{Q}$ est forcément positive, condition qui s'écrit, en vertu de la deuxième égalité (6),

$$m_2\mathfrak{Q}_1 + m_1\mathfrak{Q}_2 > 0$$

ou bien

$$\frac{m_1}{|\mathfrak{Q}_1|} > \frac{m_2}{\mathfrak{Q}_2}.$$

Mais l'égalité (8) donne

$$m_2\mathfrak{T}_1 = m_1|\mathfrak{T}_2| - \varepsilon m_1\mathfrak{T}_1;$$

on a donc

$$\frac{\mathfrak{T}_1}{|\mathfrak{Q}_1|} > \frac{|\mathfrak{T}_2|}{\mathfrak{Q}_2} - \varepsilon\frac{\mathfrak{T}_1}{\mathfrak{Q}_2}.$$

ε est une quantité positive qui peut être prise aussi petite que l'on

veut. L'inégalité précédente exige donc que l'on ait

$$\frac{\mathfrak{T}_1}{|\mathfrak{Q}_1|} \geqq \frac{|\mathfrak{T}_2|}{\mathfrak{Q}_2}$$

ou bien

$$\frac{\mathfrak{T}_1}{\mathfrak{Q}_1} \leqq \frac{\mathfrak{T}_2}{\mathfrak{Q}_2}.$$

L'égalité (1) donnant d'ailleurs

$$\mathfrak{T}_1 = E(\mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}'_1),$$
$$\mathfrak{T}_2 = E(\mathfrak{Q}_2 + \mathfrak{Q}'_2),$$

on voit que l'on a

$$\frac{\mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}'_1}{\mathfrak{Q}_1} \leqq \frac{\mathfrak{Q}_2 + \mathfrak{Q}'_2}{\mathfrak{Q}_2}$$

ou

$$\rho_1 \leqq \rho_2. \tag{9}$$

2° *Le rapport* $\frac{T_2}{T_1}$ *est incommensurable.*

Imaginons que le cycle C_2 soit l'une des formes d'un cycle de Carnot $\mathfrak{C}_2$, variable d'une manière continue, toujours réel et constamment décrit entre les températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$; évidemment, on a toujours le droit de faire cette supposition.

Lorsque le cycle $\mathfrak{C}_2$ varie d'une manière continue, sa durée T_2 demeure constante ou varie d'une manière continue; évidemment, on a toujours le droit de choisir les variations du cycle $\mathfrak{C}_2$ de telle manière que sa durée T_2 ne demeure pas constante.

Lorsque le cycle $\mathfrak{C}_2$ varie d'une manière continue, les quantités $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{Q}_2$, $\mathfrak{Q}'_2$ varient d'une manière continue; comme pour le cycle particulier C_2 aucune de ces trois quantités n'est égale à zéro, nous pouvons toujours limiter les variations du cycle $\mathfrak{C}_2$, de part et d'autre de la forme C_2, de telle sorte que nous ayons constamment

$$\mathfrak{T}_2 < 0, \qquad \mathfrak{Q}_2 < 0, \qquad \mathfrak{Q}'_2 < 0.$$

Le cycle $\mathfrak{C}_2$ sera alors constamment un cycle de second genre.

De plus, tant que le cycle $\mathfrak{C}_2$ variera d'une manière continue, le rapport ρ_2 variera d'une manière continue.

Or nous savons que, si l'on considère un des cycles $\mathfrak{C}_2$ dont la durée T_2 est commensurable avec la durée T_1 du cycle C_1, on aura

$$\rho_2 \geqq \rho_1.$$

Ce que nous venons de dire démontre que l'on aura, pour toutes les formes du cycle $\mathfrak{C}_2$, et en particulier pour la forme C_2,

$$\rho_2 \geqq \rho_1. \tag{10}$$

Si donc on considère deux cycles de Carnot, réels et non réversibles, tous deux décrits entre les mêmes températures, l'un de premier genre et d'espèce c, l'autre n'appartenant pas au premier genre et à l'espèce c, le rapport ρ relatif au premier est au plus égal au rapport ρ relatif au second.

Ce théorème peut encore s'énoncer de la manière suivante :

Considérons tous les cycles de Carnot, réels et non réversibles, décrits entre les mêmes températures $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$.

Le rapport ρ relatif à ceux qui sont de troisième genre et d'espèce c admet une limite supérieure A, essentiellement négative.

Le rapport ρ relatif à ceux qui ne sont pas de troisième genre et d'espèce c admet une limite inférieure A', essentiellement négative.

On a

$$A \leqq A'.$$

C'est la première forme du théorème de Carnot. L'emploi des modifications réversibles va nous permettre de donner à ce théorème une forme plus précise.

3. *Théorème de Carnot (suite). Emploi des modifications réversibles.* — Nous allons démontrer en premier lieu que

$$A = A'.$$

Deux températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$, cette dernière plus élevée que la première, étant données, imaginons que l'on puisse toujours trouver un système admettant quatre modifications réversibles qui jouissent des propriétés suivantes :

La première est une modification réversible isothermique Σ_{12}, correspondant à la température $\mathfrak{T}'$ et conduisant le système de l'état 1 à l'état 2.

La deuxième est une modification réversible adiabatique Σ_{23}, conduisant le système de l'état 2, où il a la température $\mathfrak{T}'$, à l'état 3, où il a la température $\mathfrak{T}$.

La troisième est une modification réversible isothermique Σ_{34}, correspondant à la température $\mathfrak{T}$ et conduisant le système de l'état 3 à l'état 4.

La quatrième est une modification réversible adiabatique Σ_{41}, ramenant le système de l'état 4 à l'état 1.

Nous aurons ainsi constitué un cycle de Carnot réversible, décrit entre les températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$.

Relativement à ce cycle, nous ferons encore l'hypothèse suivante : *Il est possible de le choisir de manière que la modification Σ_{34} ne soit pas athermique.*

D'après l'une des deux hypothèses indiquées à la fin du Chap. I, n° **8**, il existe une modification isothermique réelle S_{12}, prenant le système dans l'état 1 avec des vitesses égales à zéro, l'amenant à l'état 2 avec des vitesses égales à zéro, variable d'une manière continue et ayant pour limite la modification Σ_{12}. Il existe de même une modification isothermique réelle S_{21}, prenant le système dans l'état 2 avec des vitesses égales à zéro, l'amenant à l'état 1 avec des vitesses égales à zéro, variable d'une manière continue et ayant pour limite la modification Σ_{21}.

La modification isothermique Σ_{34}, les modifications adiabatiques Σ_{23}, Σ_{41} donnent lieu à des observations analogues.

L'ensemble des modifications

$$S_{12}, \quad S_{23}, \quad S_{34}, \quad S_{41}$$

forme un cycle de Carnot réel, décrit entre les températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$,

variable d'une manière continue, et ayant pour limite le cycle

$$\Sigma_{12},\quad \Sigma_{23},\quad \Sigma_{34},\quad \Sigma_{41}.$$

De même, l'ensemble des modifications

$$S_{43},\quad S_{32},\quad S_{21},\quad S_{14}$$

forme un cycle de Carnot réel, décrit entre les températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$, variable d'une manière continue, et ayant pour limite le cycle

$$\Sigma_{43},\quad \Sigma_{32},\quad \Sigma_{21},\quad \Sigma_{14}.$$

Soient χ_{12}, χ_{34} les quantités de chaleur dégagées par les modifications réversibles Σ_{12}, Σ_{34}; les modifications Σ_{21}, Σ_{43} dégageront respectivement des quantités de chaleur $\chi_{21} = -\chi_{12}$, $\chi_{43} = -\chi_{34}$, en sorte que, pour chacun des deux cycles

$$(\Sigma_{12}, \Sigma_{23}, \Sigma_{34}, \Sigma_{41}) \quad \text{et} \quad (\Sigma_{43}, \Sigma_{32}, \Sigma_{21}, \Sigma_{14}),$$

la quantité analogue à ρ a la même valeur

$$\rho = \frac{\chi_{12} + \chi_{34}}{\chi_{34}}.$$

Soient $\mathcal{Q}_{12}$, $\mathcal{Q}_{34}$ les effets thermiques des modifications S_{12}, S_{34}. Pour le cycle $(S_{12}, S_{23}, S_{34}, S_{41})$ la quantité analogue à ρ a pour valeur

$$\rho_1 = \frac{\mathcal{Q}_{12} + \mathcal{Q}_{34}}{\mathcal{Q}_{34}}.$$

Soient $\mathcal{Q}_{21}$, $\mathcal{Q}_{43}$ les effets thermiques des modifications S_{21}, S_{43}. Pour le cycle $(S_{43}, S_{32}, S_{21}, S_{14})$, la quantité analogue à ρ a pour valeur

$$\rho_2 = \frac{\mathcal{Q}_{21} + \mathcal{Q}_{43}}{\mathcal{Q}_{43}}.$$

Par hypothèse, la modification Σ_{34} n'est pas athermique. Supposons, pour fixer les idées, χ_{34} négatif. Les modifications S_{34} et S_{43}

pourront être prises assez voisines des modifications Σ_{34} et Σ_{43} pour que $\mathfrak{Q}_{34}$ ait le même signe que χ_{34} et que $\mathfrak{Q}_{13}$ ait le même signe que χ_{13}. Nous aurons alors

$$\mathfrak{Q}_{34} < 0, \qquad \mathfrak{Q}_{13} > 0,$$

en sorte que ρ_1 se rapportera certainement à un cycle de troisième genre et d'espèce c et ρ_2 à un cycle qui n'est pas de troisième genre et d'espèce c.

Le théorème démontré au numéro précédent nous donnera

$$\rho_1 \leqq A, \qquad \rho_2 \geqq A'.$$

Mais, d'autre part, lorsque les deux cycles

$$(S_{12}, S_{23}, S_{34}, S_{41}) \quad \text{et} \quad (S_{13}, S_{32}, S_{21}, S_{14})$$

tendent respectivement vers les cycles

$$(\Sigma_{12}, \Sigma_{23}, \Sigma_{34}, \Sigma_{41}) \quad \text{et} \quad (\Sigma_{13}, \Sigma_{32}, \Sigma_{21}, \Sigma_{14}),$$

les deux rapports ρ_1, ρ_2 tendent vers la limite commune r. Comme les quantités A et A′ ne varient pas lorsque les températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$ sont maintenues invariables, cela ne peut avoir lieu que si l'on a

$$A = A', \tag{10}$$

comme nous l'avions annoncé.

Nous voyons en outre que, *si un cycle de Carnot réversible est décrit entre les températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$ ($\mathfrak{T}'$ étant supérieur à $\mathfrak{T}$); si, de plus, l'isothermique décrite à la température $\mathfrak{T}$ n'est pas athermique, le rapport*

$$\rho = \frac{\mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}'}{\mathfrak{Q}}$$

a, pour ce cycle, la valeur A.

Que devient le rapport ρ pour un cycle de Carnot réversible décrit entre les températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$, si l'isothermique relative à la température $\mathfrak{T}$ est athermique?

Désignons par C_1 ce cycle; nous avons, par hypothèse,

$$\mathcal{Q}_1 = 0.$$

Soit C_2 un autre cycle de Carnot réversible, décrit entre les températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$, et pour lequel l'isothermique relative à la température $\mathfrak{T}$ n'est pas athermique. Pour ce cycle, nous aurons, d'après la proposition précédente,

$$\frac{\mathcal{Q}_2 + \mathcal{Q}'_2}{\mathcal{Q}_2} = A.$$

Les deux cycles C_1 et C_2 peuvent être considérés comme virtuels. On peut donc toujours supposer qu'ils soient décrits simultanément d'une manière indépendante. Leur ensemble formera un nouveau cycle de Carnot réversible décrit entre les températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$. L'isothermique décrite à la température $\mathfrak{T}$ correspondra à un effet thermique $\mathcal{Q}_2$, en sorte qu'elle ne sera pas athermique. L'isothermique décrite à la température $\mathfrak{T}'$ correspondra à un effet thermique $(\mathcal{Q}'_1 + \mathcal{Q}'_2)$. D'après le théorème précédent, on aura, pour ce cycle,

$$\frac{\mathcal{Q}_2 + \mathcal{Q}'_1 + \mathcal{Q}'_2}{\mathcal{Q}_2} = A.$$

Cette égalité ne sera compatible avec la précédente que si l'on a

$$\mathcal{Q}'_1 = 0.$$

D'où cette proposition :

Si un cycle de Carnot réversible est décrit entre les températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$ ($\mathfrak{T}'$ étant supérieur à $\mathfrak{T}$), et si la modification isothermique décrite à la température $\mathfrak{T}$ est athermique, la modification isothermique produite à la température $\mathfrak{T}$ est aussi athermique.

Dans ce cas, le rapport

$$\frac{\mathcal{Q} + \mathcal{Q}'}{\mathcal{Q}}$$

perd tout sens.

Nous allons démontrer maintenant que, *pour aucun cycle réali-*

sable et non réversible décrit entre les températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$, le rapport

$$\rho = \frac{\mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}'}{\mathfrak{Q}}$$

ne peut atteindre la valeur A.

La valeur A étant essentiellement négative, le rapport ρ ne peut atteindre la valeur A, à moins que le cycle n'appartienne soit au deuxième genre, soit au troisième genre et à l'espèce *c*. Supposons que, pour un cycle C_1 (nous admettrons, pour fixer les idées, qu'il soit de deuxième genre), on ait

$$\rho_1 = \frac{\mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}'_1}{\mathfrak{Q}_1} = A$$

ou bien, puisque l'égalité (1) permet de remplacer $(\mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{Q}'_1)$ par $E\mathfrak{T}_1$,

$$E\mathfrak{T}_1 = A\mathfrak{Q}_1. \tag{11}$$

Nous avons vu que l'existence de cycles réversibles et réels n'était nullement absurde. Admettons donc que l'on ait constitué un cycle de Carnot C_2, réversible, réel, décrit entre les mêmes températures $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$ que le cycle C_1, et pour lequel la quantité $\mathfrak{T}_2$ ne soit pas égale à zéro.

La quantité $\mathfrak{T}_2$ sera, dès lors, positive ou négative; nous pouvons toujours la supposer positive, car, si elle était négative, il suffirait de réaliser le cercle réversible C_2 en sens contraire pour qu'elle devînt positive.

En faisant varier d'une manière continue le cycle de Carnot C_2, sans changer ni sa réversibilité, ni les températures entre lesquelles il est décrit, nous pourrons toujours l'amener à satisfaire aux conditions suivantes :

1° La durée T_1 du cycle C_1 et la durée T_2 du cycle C_2 sont commensurables;

2° Les quantités $|\mathfrak{T}_1|$ et $\mathfrak{T}_2$ sont commensurables.

Posons

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\mu_2}{\mu_1}, \qquad \frac{\mathfrak{T}_2}{|\mathfrak{T}_1|} = \frac{m_2}{m_1}, \tag{12}$$

μ_1, μ_2, m_1, m_2 étant quatre nombres entiers.

Au moyen des cycles C_1, C_2, constituons un cycle de Carnot Γ, de la même manière qu'au n° 4. Pour ce cycle Γ, nous aurons

$$(13)\qquad \begin{cases} \mathfrak{T} = \mu_1\mu_2(m_2\mathfrak{T}_1 + m_1\mathfrak{T}_2), \\ \mathfrak{Q} = \mu_1\mu_2(m_2\mathfrak{Q}_1 + m_1\mathfrak{Q}_2), \\ \mathfrak{Q}' = \mu_1\mu_2(m_2\mathfrak{Q}'_1 + m_1\mathfrak{Q}'_2). \end{cases}$$

La seconde égalité (12), jointe à la première égalité (13), montre que l'on a

$$\mathfrak{T} = 0.$$

Le cycle Γ est donc un cycle de premier genre.

La quantité $\mathfrak{Q}_2$ ne peut être égale à zéro. En effet, le cycle C_2 est réversible; d'après une proposition démontrée tout à l'heure, la quantité $\mathfrak{Q}_2$ ne pourrait être égale à zéro sans que la quantité $\mathfrak{Q}'_2$ le soit également; l'égalité

$$\mathfrak{T}_2 = E(\mathfrak{Q}_2 + \mathfrak{Q}'_2)$$

donnerait alors

$$\mathfrak{T}_2 = 0,$$

contrairement à l'hypothèse faite.

Puisque, dans le cycle réversible C_2, la quantité $\mathfrak{Q}_2$ n'est pas égale à zéro, nous savons que l'on a

$$\frac{\mathfrak{Q}_2 + \mathfrak{Q}'_2}{\mathfrak{Q}_2} = A$$

ou bien

$$(14)\qquad E\mathfrak{T}_2 = A\mathfrak{Q}_2.$$

Les égalités (11) et (14), jointes à la seconde égalité (13), montrent que, dans le cycle Γ, on a

$$\mathfrak{Q} = \mu_1\mu_2\frac{E}{A}(m_2\mathfrak{T}_1 + m_1\mathfrak{T}_2) = 0.$$

Le cycle Γ serait donc un cycle de Carnot du premier genre, décrit entre les températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$, dans lequel l'isothermique décrite à la

température $\mathfrak{T}$ serait athermique. Mais, d'autre part, le cycle Γ serait un cycle de Carnot réalisable et il ne serait pas exclusivement composé d'états d'équilibre, puisque le cycle C_2 n'est pas exclusivement composé d'états d'équilibre. L'existence du cycle Γ est, dès lors, en contradiction avec l'hypothèse énoncée au n° **2**. Admettant l'exactitude de cette dernière hypothèse, nous pouvons formuler la proposition suivante :

Pour aucun cycle réalisable et non réversible, le rapport

$$\rho = \frac{\mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}'}{\mathfrak{Q}}$$

ne peut atteindre la valeur A.

Réunissons maintenant en un seul théorème les diverses propositions démontrées au numéro précédent et au présent numéro :

Soient $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$ deux températures, $\mathfrak{T}'$ étant supérieur à $\mathfrak{T}$. Il existe une grandeur négative A, *qui dépend uniquement de ces deux températures $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$, et qui jouit des propriétés suivantes :*

1° *Pour tout cycle de Carnot réversible réalisable ou non, décrit entre les températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$, on a*

$$\rho = \frac{\mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}'}{\mathfrak{Q}} = A; \tag{15}$$

2° *Pour tout cycle de Carnot, décrit entre les températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$, qui est réalisable, non réversible, de troisième genre et d'espèce c, on a*

$$\rho = \frac{\mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}'}{\mathfrak{Q}} < A; \tag{16}$$

3° *Pour tout cycle de Carnot, décrit entre les températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$, qui est réalisable et non réversible, qui n'est pas de troisième genre et d'espèce c, on a*

$$\rho = \frac{\mathfrak{Q} + \mathfrak{Q}'}{\mathfrak{Q}} > A. \tag{17}$$

De cet énoncé sont exclus :

1° Les cycles réalisables et non réversibles pour lesquels on a

$$\mathfrak{T} > 0, \qquad \mathfrak{Q} = 0;$$

2° Les cycles réversibles pour lesquels on a

$$\mathfrak{Q} = 0;$$

pour ces derniers, on a également

$$\mathfrak{Q}' = 0.$$

6. *La température absolue.* — La quantité A est une fonction des températures $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$: étudions plus profondément la nature de cette fonction, ou plutôt, de la fonction

$$\psi(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}') = A - 1. \tag{18}$$

Cette fonction, qui n'est définie que pour les valeurs de $\mathfrak{T}'$ supérieures à $\mathfrak{T}$, est négative et supérieure à 1 en valeur absolue.

Moyennant l'égalité (18), l'égalité et les inégalités (15), (16) et (17) peuvent être remplacées par l'égalité et les inégalités

$$\frac{\mathfrak{Q}'}{\mathfrak{Q}} = \psi(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}'), \tag{15 bis}$$

$$\frac{\mathfrak{Q}'}{\mathfrak{Q}} < \psi(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}'), \tag{16 bis}$$

$$\frac{\mathfrak{Q}'}{\mathfrak{Q}} > \psi(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}'). \tag{17 bis}$$

Soient $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$, $\mathfrak{T}''$ trois températures, rangées par ordre de grandeur croissante; nous allons nous proposer de trouver une relation entre les trois quantités

$$\psi(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}'), \quad \psi(\mathfrak{T}', \mathfrak{T}''), \quad \psi(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}'').$$

Considérons un cycle de Carnot *réversible* décrit entre les températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}''$. Ce cycle prend le corps à la température $\mathfrak{T}''$, dans

l'état A″; par une transformation isothermique, il l'amène à l'état B″; puis, par une transformation adiabatique, à l'état B, dont la température est $\mathfrak{T}$; une nouvelle transformation isothermique, accomplie à la température $\mathfrak{T}$, l'amène à l'état A; une nouvelle transformation adiabatique le ramène à l'état A″.

Supposons que l'effet calorifique de la transformation BA, effet que nous désignerons par $\mathfrak{Q}(\mathrm{BA})$, soit différent de zéro.

Nous aurons alors

$$(a) \qquad \frac{\mathfrak{Q}(\mathrm{A''B''})}{\mathfrak{Q}(\mathrm{BA})} = \psi(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}'').$$

En subissant la transformation B″B le corps passe, au moins une fois, par la température $\mathfrak{T}'$; soit B′ un état où il présente cette température. De même, en subissant la transformation AA″, le corps passe, au moins une fois, par la température $\mathfrak{T}'$; soit A′ un état où il présente cette température. Relions les deux états A′, B′, par une suite d'états d'équilibre du système, ces états correspondant tous à la température $\mathfrak{T}'$, nous obtiendrons une modification isothermique réversible, A′B′.

Le cycle A′B′BAA′ sera un cycle de Carnot réversible décrit entre les températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$; comme $\mathfrak{Q}(\mathrm{BA})$ n'est pas nul, on aura

$$(b) \qquad \frac{\mathfrak{Q}(\mathrm{A'B'})}{\mathfrak{Q}(\mathrm{BA})} = \psi(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}');$$

$\mathfrak{Q}(\mathrm{A'B'})$ n'est certainement pas nul, puisque $\psi(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}')$ n'est pas nul. Mais on a évidemment

$$(c) \qquad \mathfrak{Q}(\mathrm{A'B'}) + \mathfrak{Q}(\mathrm{B'A'}) = 0.$$

$\mathfrak{Q}(\mathrm{B'A'})$ n'est donc pas nul. Dès lors, dans le cycle de Carnot réversible A″B″B′A′A″, décrit entre les températures $\mathfrak{T}'$ et $\mathfrak{T}''$, on aura

$$(d) \qquad \frac{\mathfrak{Q}(\mathrm{A''B''})}{\mathfrak{Q}(\mathrm{B'A'})} = \psi(\mathfrak{T}', \mathfrak{T}'').$$

Les égalités (a), (b), (c), (d) donnent

$$(19) \qquad \psi(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}'') = -\psi(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}')\psi(\mathfrak{T}', \mathfrak{T}'').$$

C'est la relation que nous voulions obtenir.

La fonction $\psi(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}')$ n'a de sens, jusqu'ici, qu'autant que $\mathfrak{T}'$ est supérieur à $\mathfrak{T}$.

Lorsque $\mathfrak{T}'$ tend vers $\mathfrak{T}$, par valeurs supérieures à $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{Q}'$ tend évidemment, dans un cycle de Carnot réversible, décrit entre les températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$, vers la limite $(-\mathfrak{Q})$; $\psi(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}')$ tend donc vers -1. Nous conviendrons de poser

$$\psi(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}) = -1.$$

Lorsque $\mathfrak{T}'$ sera inférieur à $\mathfrak{T}$, nous définirons $\psi(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}')$ par l'égalité

$$\psi(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}') = -\frac{1}{\psi(\mathfrak{T}', \mathfrak{T})}.$$

D'après ces définitions, l'équation fonctionnelle (19), établie en supposant

$$\mathfrak{T} < \mathfrak{T}' < \mathfrak{T}'',$$

demeurera vraie, quels que soient $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$, $\mathfrak{T}''$. De plus, on sera assuré que la fonction $\psi(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}')$ est continue pour toute valeur de $\mathfrak{T}$ et de $\mathfrak{T}'$.

Prenons une température fixe, arbitraire d'ailleurs, $\mathfrak{T}_0$. L'équation fonctionnelle (19) nous donnera

$$\psi(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}') = -\frac{\psi(\mathfrak{T}_0, \mathfrak{T}')}{\psi(\mathfrak{T}_0, \mathfrak{T})}.$$

La température $\mathfrak{T}_0$ étant fixe, $\psi(\mathfrak{T}_0, \mathfrak{T})$ devient une fonction de la seule variable $\mathfrak{T}$; posons

$$F(\mathfrak{T}) = -\lambda\psi(\mathfrak{T}_0, \mathfrak{T}), \tag{20}$$

λ étant une constante.

L'équation précédente deviendra

$$\psi(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}') = -\frac{F(\mathfrak{T}')}{F(\mathfrak{T})}. \tag{21}$$

La fonction $\psi(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}')$ est une fonction continue de $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}'$; lorsque $\mathfrak{T}'$ est supérieur à $\mathfrak{T}$, elle est négative et supérieure à 1 en valeur absolue. La fonction $F(\mathfrak{T})$ possède donc les propriétés suivantes :

Elle est essentiellement positive;

Elle varie d'une manière continue avec la température $\mathfrak{T}$;

Elle croît toujours en même temps que la température $\mathfrak{T}$.

D'après ce que nous avons dit plus haut (Ire Partie, Chap. I, n° 6), au lieu de prendre la quantité $\mathfrak{T}$ pour déterminer la température des corps, on peut prendre la quantité $T = F(\mathfrak{T})$, dont la valeur pour chaque température ne dépend plus du choix du thermomètre; T porte le nom de *température absolue*.

Si l'on a adopté, pour représenter les températures, la température absolue T, cas auquel on devra poser, dans toutes les formules précédentes,

$$\mathfrak{T} = T,$$

on devra aussi, dans toutes les formules, poser

$$F(\mathfrak{T}) = F(T) = T.$$

Si l'on se souvient que

$$\psi(\mathfrak{T}_0, \mathfrak{T}_0) = -1,$$

on voit que l'égalité (20) donne

$$F(\mathfrak{T}_0) = \lambda.$$

La température absolue n'est donc pas entièrement déterminée; à une température arbitraire $\mathfrak{T}_0$, elle prend une valeur arbitraire λ. Il est d'usage de prendre pour température $\mathfrak{T}_0$ la température qui sert de 0 à l'échelle centigrade et, pour λ, l'inverse d'une certaine constante que l'on rencontre dans l'étude des gaz : *le coefficient de dilatation des gaz parfaits*.

On sait que cette définition de la température absolue a été indiquée par Sir W. Thomson et exposée à plusieurs reprises par M. G. Lippmann.

7. *Énoncé définitif du théorème de Carnot.* — La détermination de la fonction $\psi(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}')$, fournie par l'égalité (21), va nous permettre de donner au théorème de Carnot une forme nouvelle et définitive.

Excluons d'abord :

1° Les cycles de Carnot réversibles, décrits entre les températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$, dans lesquels la modification produite à la température $\mathfrak{T}$ est athermique;

2° Les cycles de Carnot réalisables, non réversibles, de troisième genre, décrits entre les températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$, pour lesquels la modification produite à la température $\mathfrak{T}$ est athermique.

Pour les cycles réversibles, réalisables ou non, les égalités (15 *bis*) et (21) donnent

$$\frac{\mathfrak{Q}'}{\mathfrak{Q}} = -\frac{F(\mathfrak{T}')}{F(\mathfrak{T})}$$

et, puisque $\mathfrak{Q}$ est différent de zéro,

$$\frac{\mathfrak{Q}}{F(\mathfrak{T})} + \frac{\mathfrak{Q}'}{F(\mathfrak{T}')} = 0.$$

Pour les cycles réalisables, non réversibles, de troisième genre et d'espèce c, l'inégalité (16 *bis*) et l'égalité (21) donnent

$$\frac{\mathfrak{Q}'}{\mathfrak{Q}} < -\frac{F(\mathfrak{T}')}{F(\mathfrak{T})}.$$

Mais, dans ce cas, la quantité $\mathfrak{Q}$ est négative; on a donc

$$\frac{\mathfrak{Q}}{F(\mathfrak{T})} + \frac{\mathfrak{Q}'}{F(\mathfrak{T}')} > 0.$$

Pour les autres cycles non réversibles, l'inégalité (17 *bis*), jointe à l'égalité (21), donne

$$\frac{\mathfrak{Q}'}{\mathfrak{Q}} > -\frac{F(\mathfrak{T}')}{F(\mathfrak{T})}.$$

Dans tous ces cycles, la quantité $\mathfrak{Q}$ est positive; on a donc encore

$$\frac{\mathfrak{Q}}{F(\mathfrak{T})} + \frac{\mathfrak{Q}'}{F(\mathfrak{T}')} > 0.$$

Revenons maintenant aux deux classes que nous avons exclues.

Pour tout cycle de la première classe, nous savons que l'on a non

seulement $\mathfrak{Q} = 0$, mais encore $\mathfrak{Q}' = 0$; nous pouvons donc encore écrire

$$\frac{\mathfrak{Q}}{F(\mathfrak{T})} + \frac{\mathfrak{Q}'}{F(\mathfrak{T}')} = 0.$$

Pour tout cycle de la seconde classe, nous avons

$$\mathfrak{Q} = 0, \qquad \mathfrak{E} > 0.$$

L'égalité (1), qui se réduit ici à

$$\mathfrak{E} = E\mathfrak{Q}',$$

nous donne alors

$$\mathfrak{Q}' > 0.$$

Nous pouvons donc écrire, pour tout cycle de cette classe,

$$\frac{\mathfrak{Q}}{F(\mathfrak{T})} + \frac{\mathfrak{Q}'}{F(\mathfrak{T}')} > 0.$$

En réunissant tous les résultats que nous venons d'obtenir, nous pouvons énoncer, sous la forme générale que voici, le THÉORÈME DE CARNOT :

1° *Pour tout cycle de Carnot réversible, réalisable ou non, décrit entre les températures* $\mathfrak{T}$ *et* $\mathfrak{T}'$, *on a*

$$\frac{\mathfrak{Q}}{F(\mathfrak{T})} + \frac{\mathfrak{Q}'}{F(\mathfrak{T}')} = 0. \tag{22}$$

2° *Pour tout cycle de Carnot réel et non réversible, décrit entre les températures* $\mathfrak{T}$ *et* $\mathfrak{T}'$, *on a*

$$\frac{\mathfrak{Q}}{F(\mathfrak{T})} + \frac{\mathfrak{Q}'}{F(\mathfrak{T}')} > 0. \tag{23}$$

On peut mettre ces énoncés sous une forme un peu plus explicite en revenant à la définition de l'effet calorifique total d'une modification ou d'un ensemble de modifications.

Soit Q la somme des quantités de chaleur dégagées par le système durant cet ensemble de modifications; si ces modifications sont réversibles, nous avons

$$\mathfrak{Q} = Q,$$

ce qui permet de remplacer l'égalité (22) par l'égalité

$$(22\,bis) \qquad \frac{Q}{F(\mathfrak{T})} + \frac{Q'}{F(\mathfrak{T}')} = 0.$$

Si les modifications considérées sont réelles et non réversibles, désignons par $[\mathfrak{T}]$ la somme des accroissements que la force vive du système a subis durant ces modifications; nous aurons

$$E\mathfrak{Q} = EQ + [\mathfrak{T}],$$

ce qui nous permettra de remplacer l'inégalité (23) par l'inégalité

$$(23\,bis) \qquad \frac{EQ + [\mathfrak{T}]}{F(\mathfrak{T})} + \frac{EQ' + [\mathfrak{T}]'}{F(\mathfrak{T}')} > 0.$$

Ces divers énoncés ne souffrent plus d'exception.

CHAPITRE III.

L'ENTROPIE ET LE THÉORÈME DE CLAUSIUS.

1. *Conditions et hypothèses.* — Le théorème de Carnot a été, on le sait, généralisé par R. Clausius. Toutefois, cette généralisation n'est légitime que moyennant un certain nombre de conditions et d'hypothèses, dont les unes portent sur le système étudié, les autres sur les modifications que subit ce système.

Il ne nous sera pas utile, dans ce Chapitre, de distinguer, parmi les paramètres qui définissent l'état du système, ceux que nous avons désignés par les lettres a, b, ..., l de ceux que nous avons désignés par les lettres α, β, ..., λ. Par contre, il nous sera nécessaire de

mettre particulièrement en évidence, parmi les paramètres qui définissent l'état du système, la température $\mathfrak{T}$. Nous supposerons d'ailleurs que *cette dernière a la même valeur en tous les points du système*. Ainsi l'état du système sera défini par les n paramètres

$$\alpha, \quad \beta, \quad \ldots, \quad \lambda, \quad \mathfrak{T}.$$

Le système que nous allons étudier ne sera pas soumis seulement à cette restriction d'avoir, en chacun de ses états, la même température en tous ses points, cette température pouvant d'ailleurs varier d'un état à l'autre. Nous le supposerons encore soumis à deux autres restrictions fondamentales :

Première restriction. — *Soit un état quelconque du système, défini par des valeurs*

$$\alpha, \quad \beta, \quad \ldots, \quad \lambda, \quad \mathfrak{T},$$

des paramètres variables; nous admettrons que l'on puisse toujours trouver, au moins d'une manière, un système de corps étrangers, tous portés à la température $\mathfrak{T}$, *et tels que le système considéré, demeure indéfiniment en équilibre dans l'état* α, β, ..., λ, $\mathfrak{T}$ *si on le soumet à l'action de ces corps étrangers, maintenus invariables et si on le prend avec un ensemble de vitesses initiales égales à zéro,*

L'énoncé de cette restriction ne constitue pas une vaine précaution. On rencontre souvent, en Physique, des systèmes qui n'y sont pas soumis et auxquels, par conséquent, les considérations qui vont suivre ne sont pas applicables. Citons-en quelques exemples :

1° Un corps conducteur est traversé par des courants électriques. Parmi les paramètres variables qui déterminent l'état de ce conducteur figurent :

Les composantes u, v, w du flux électrique en chaque point (x, y, z) du conducteur;

La densité solide ρ de l'électricité en chaque point de la masse du conducteur;

La densité superficielle σ de l'électricité en chaque point des surfaces de discontinuité qui partagent le conducteur ou qui le limitent.

Peut-on, en faisant agir des corps extérieurs convenablement choisis, maintenir le conducteur dont il s'agit en équilibre, de telle sorte que les variables que nous venons d'énumérer aient toutes des valeurs indépendantes du temps? Cela ne sera pas possible, si l'on n'a pas, en tout point de la masse du conducteur, la relation

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{1}$$

et, en tout point d'une surface de discontinuité dont la normale présente les deux orientations N_1, N_2,

$$\left\{\begin{aligned} & u_1 \cos(N_1, x) + v_1 \cos(N_1, y) + w_1 \cos(N_1, z) \\ & + u_2 \cos(N_2, x) + v_2 \cos(N_2, y) + w_2 \cos(N_2, z) = 0. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

En effet, si ces deux relations ne sont pas vérifiées, les paramètres ρ et σ varieront forcément avec le temps t, en vertu des égalités générales

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial \rho}{\partial t},$$

$$\begin{aligned} & u_1 \cos(N_1, x) + v_1 \cos(N_1, y) + w_1 \cos(N_1, z) \\ & + u_2 \cos(N_2, x) + v_2 \cos(N_2, y) + w_2 \cos(N_2, z) = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}. \end{aligned}$$

Les relations (1) et (2) caractérisant les courants que l'on nomme *uniformes*, on voit que l'on peut énoncer la proposition suivante, qui a de graves conséquences en Électrodynamique [1] :

Un système de courants non uniformes ne satisfait pas à la restriction précédente.

2° Une chaîne fermée, parcourue par un courant uniforme, renferme un conducteur électrolytique. Parmi les variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{z}$ qui définissent l'état de ce système, figurent l'intensité du courant et

---

[1] P. Duhem, *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*, I, III, p. 221.

les variables qui déterminent l'état chimique du système; or, en vertu de la définition des électrolytes, connue sous le nom de *loi de Faraday*, un électrolyte traversé par un courant éprouve, pendant chaque intervalle de temps, un changement chimique proportionnel en grandeur à cet intervalle de temps et à l'intensité du courant. Il serait donc contradictoire d'imaginer des corps extérieurs dont l'action maintiendrait le système en équilibre, et, partant, rendrait invariables à la fois l'intensité du courant et l'état chimique de la chaîne. Ainsi, une chaîne parcourue par des courants même uniformes ne satisfait pas à la restriction précédente si elle renferme des électrolytes; cette conclusion est importante en Électrodynamique ([1]).

L'hypothèse restrictive précédente entraîne un corollaire remarquable :

Corollaire. — *D'un état quelconque* $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{T})$ *du système à un autre état quelconque* $(\alpha', \beta', \ldots, \lambda', \mathfrak{T}')$ *on peut toujours passer par une infinité de modifications réversibles.*

En effet, entre les deux états $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{T})$ et $(\alpha', \beta', \ldots, \lambda', \mathfrak{T}')$, on peut toujours, d'une infinité de manières, ranger une suite continue d'états du système; au moyen de corps extérieurs convenablement choisis, ces états peuvent être transformés en états d'équilibre; chacune des suites, constituées comme nous venons de l'indiquer, forme alors une suite continue d'états d'équilibre, ou bien, en vertu d'une hypothèse indiquée au Chap. I, n° **8**, une modification réversible.

Seconde restriction. — Imaginons qu'à partir d'un certain état $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{T})$ du système, on lui impose une modification virtuelle

$$\delta\alpha, \quad \delta\beta, \quad \ldots, \quad \delta\lambda, \quad \delta\mathfrak{T}.$$

Les actions des corps extérieurs qui le maintiendraient en équilibre en l'état $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{T})$ effectuent un travail virtuel

$$A\delta\alpha + B\delta\beta + \ldots + L\delta\lambda + \Theta\delta\mathfrak{T}.$$

([1]) P. Duhem, *Leçons sur l'Électricité et le Magnétisme*, t. III, p. 220.

Nous admettrons que *les quantités* A, B, ..., L, Θ *sont des fonctions finies, uniformes et continues des paramètres* α, β, ..., λ, ξ.

Non plus que la précédente, cette restriction n'est inutile à énoncer, car il n'est nullement évident que tous les systèmes étudiés en Physique y soient soumis. En particulier, M. Marcel Brillouin [1] a donné des déformations permanentes une théorie qui suppose les quantités A, B, ..., L, Θ, fonctions continues, mais non uniformes, des variables α, β, ..., λ, ξ.

Nous ajouterons l'hypothèse suivante à celle que nous venons d'énoncer :

Le travail virtuel des actions qu'il faut appliquer à un système donné pour le maintenir en équilibre ne dépend pas de la position absolue que le système occupe dans l'espace ni de la variation de cette position.

Il résulte en premier lieu de cette hypothèse que les quantités A, B, ..., L, Θ ne dépendent pas de celles des variables α, β, ..., λ, ξ, qui fixent dans l'espace la position absolue du système.

Il en résulte, en second lieu, que celles des variations virtuelles $\delta\alpha$, $\delta\beta$, ..., $\delta\lambda$, $\delta\xi$ qui correspondent aux variables fixant la position absolue du système dans l'espace ne figurent pas dans la somme

$$A\,\delta\alpha + B\,\delta\beta + \ldots + L\,\delta\lambda + \Theta\,\delta\xi.$$

Le coefficient de chacune d'elles est identiquement nul.

2. *Coefficients calorifiques du système en équilibre.* — Pour expliquer commodément ce qui va suivre, nous emploierons le langage de la Géométrie à n dimensions, n étant le nombre des paramètres α, β, ..., λ, ξ, qui définissent l'état du système. Les énoncés auxquels nous parviendrons pourront toujours être représentés par des figures planes s'il n'y a qu'un seul paramètre tel que α, β, ..., λ, et par des figures dans l'espace s'il y en a deux.

---

[1] Marcel Brillouin, *Déformations permanentes et Thermodynamique* (*Comptes rendus*, 6, 13, 20 et 27 février 1888).

Un état du système, correspondant à un système de valeurs des coordonnées $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{T}$, sera représenté par un *point* dans l'espace à n dimensions. Une modification, correspondant à une série linéaire de valeurs de $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{T}$, sera représentée par une *ligne*.

Le système étant pris dans un état déterminé $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{T})$ les actions $A, B, \ldots, L, \Theta$ qui le peuvent maintenir en équilibre dans cet état sont, par hypothèse, des fonctions uniformes et continues des variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{T}$.

$$(1)\qquad \begin{cases} A = f_\alpha(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{T}), \\ B = f_\beta(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{T}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ L = f_\lambda(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{T}), \\ \Theta = f_\mathfrak{T}(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{T}). \end{cases}$$

Ces équations (1) sont les *équations d'équilibre du système;* ces équations seront dites *connues* lorsqu'on connaîtra la forme des n fonctions $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{T}$.

Soit U la fonction uniforme et continue de $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{T}$, qui représente l'énergie interne du système. Posons

$$(2)\qquad \begin{cases} R_\alpha = \dfrac{\partial U}{\partial \alpha} - \dfrac{f_\alpha}{E}, \\ R_\beta = \dfrac{\partial U}{\partial \beta} - \dfrac{f_\beta}{E}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ R_\lambda = \dfrac{\partial U}{\partial \lambda} - \dfrac{f_\lambda}{E}, \\ C = \dfrac{\partial U}{\partial \mathfrak{T}} - \dfrac{f_\mathfrak{T}}{E}. \end{cases}$$

Les n quantités $R_\alpha, R_\beta, \ldots, R_\lambda, C$ définies par ces équations seront des fonctions uniformes de $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{T}$. Ce seront [Ire Partie, Chap. III, égalités (12) et (12 *bis*)] les *coefficients calorifiques du système en équilibre*. Parmi ces paramètres, il en est un qui se distinguera des autres par des propriétés particulières; c'est le coeffi-

cient C; nous le nommerons la *capacité calorifique du système, relative aux variables* $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{T}$.

Comme la quantité U d'une part (Ire Partie, Chap. II, n° **2**, dixième convention) et les quantités A, B, ..., L, Θ d'autre part (ce Chapitre, n° **1**), les quantités $R_\alpha, R_\beta, \ldots, R_\lambda$, C, ne dépendent pas de celles des variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{T}$, qui fixent la position absolue du système dans l'espace. De plus, ceux des coefficients calorifiques qui multiplieraient, dans l'expression de dQ, les variations de ces dernières variables sont identiquement nuls.

L'équation

$$(3) \qquad dQ = -(R_\alpha \delta\alpha + R_\beta \delta\beta + \ldots + R_\lambda \delta\lambda + C\,\delta\mathfrak{T})$$

détermine [Ire Partie, Chap. III, égalité (13)] la quantité de chaleur dégagée par le système tandis qu'il subit la modification réelle ou virtuelle ($\delta\alpha, \delta\beta, \ldots, \delta\lambda, \delta\mathfrak{T}$).

L'équation différentielle

$$(4) \qquad R_\alpha d\alpha + R_\beta d\beta + \ldots + R_\lambda d\lambda + C\,d\mathfrak{T} = 0$$

représente, dans l'espace à n dimensions considéré, une famille d'espaces à $(n-1)$ dimensions (de lignes, dans l'espace à deux dimensions, de surfaces dans l'espace à trois dimensions). Nous admettrons que, *par tout point* ($\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{T}$) *de l'espace à n dimensions, il passe un et un seul de ces espaces à* $(n-1)$ *dimensions; que, de plus, l'espace ainsi déterminé, qui passe par le point* ($\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{T}$), *se déplace et se déforme d'une manière continue lorsque le point* ($\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{T}$) *se déplace d'une manière continue.*

Nous admettrons en outre qu'un espace à adiabatiques réversibles ne se ferme jamais sur lui-même comme une ligne fermée ou une surface fermée, mais qu'il forme toujours un espace simplement connexe, s'étendant jusqu'aux limites du champ des valeurs des α, $\beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{T}$.

Considérons une ligne quelconque tracée tout entière en l'un de ces espaces à $(n-1)$ dimensions. Cette ligne représentera une suite continue d'états du système. En chacun de ces états ($\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{T}$), supposons le système entouré de corps qui ont la même température

que lui et qui exercent sur lui des actions données par les égalités (1). Cette suite d'états sera une suite d'états d'équilibre. D'après l'hypothèse indiquée au Chap. I, n° 8, cette suite d'états d'équilibre constituera une modification réversible. Les égalités (3) et (4) montrent que, pour tout élément de cette modification réversible, on aura

$$dQ = 0,$$

en sorte que cette modification réversible sera adiabatique. Ainsi *toute ligne tracée en entier en l'un des espaces à* $(n-1)$ *dimensions définis par l'équation* (4) *représente une modification adiabatique réversible du système.* Nous nommerons chacun des espaces à $(n-1)$ dimensions définis par l'équation (4) un *espace à adiabatiques réversibles.*

Prenons deux points, m et n, dans l'espace à n dimensions considéré; entre ces deux points, m et n, menons deux lignes, l et l', telles que chacune d'elles n'ait pas plus d'un point commun avec un même espace à adiabatiques réversibles. Les propositions suivantes, évidentes géométriquement lorsque les espaces à adiabatiques réversibles sont des lignes ($n=2$) ou des surfaces ($n=3$), peuvent être énoncées d'une manière entièrement générale :

L'espace à adiabatiques réversibles mené par un point a de la ligne l rencontre la ligne l' en un et un seul point a'; les deux points a et a' sont dits *points correspondants.*

Si les trois points a', b', c' de la ligne l' correspondent respectivement aux trois points a, b, c de la ligne l; si le point b est situé, sur la ligne l, entre les points a et c, le point b' est situé sur la ligne l', entre les points a' et c'.

Si deux points a, b sont infiniment voisins sur la ligne l, leurs correspondants a', b' sont infiniment voisins sur la ligne l'.

Au point m sur la ligne l correspond le même point m sur la ligne l'; au point n sur la ligne l correspond le même point n sur la ligne l'.

Ce mode de correspondance entre les points de deux lignes va nous être utile dans la démonstration du théorème de Clausius, démonstration que nous allons maintenant aborder.

5. *Démonstration du théorème de Clausius.* — Une ligne quelconque, tracée dans l'espace à n dimensions considéré, représente une suite d'états du système; si, dans chacun de ces états, nous supposons le système entouré de corps à la même température que lui et exerçant sur lui des actions données par les égalités (1), chacun de ces états deviendra un état d'équilibre, et la suite de ces états sera une modification réversible. Ainsi, *une ligne quelconque, tracée dans l'espace des* $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{T}$, *représente toujours, d'une et d'une seule manière, une modification réversible du système.*

Nous allons étudier les propriétés de semblables transformations; mais nous supposerons provisoirement chacune des modifications réversibles étudiées soumise à certaines restrictions que nous lèverons ensuite une à une :

1° La ligne qui représente une des modifications réversibles étudiées ne présente aucune partie d'étendue finie tracée en entier dans un espace à adiabatiques réversibles;

2° La ligne qui représente une des modifications réversibles étudiées ne rencontre jamais plus d'une fois un même espace à adiabatiques réversibles. Cette dernière restriction suppose évidemment cette autre : la ligne considérée ne passe pas plus d'une fois par un même point.

Considérons deux modifications réversibles l, l', soumises aux restrictions précédentes; toutes deux prennent le système dans le même état initial, représenté par le point m, et l'amènent au même état final, représenté par le point n.

Soient a, b deux états infiniment voisins de la modification l, l'état b venant après l'état a lorsqu'on suit la modification l en allant de m vers n. Soient a', b' les deux états de la modification l' qui correspondent respectivement aux deux états a, b. D'après ce que nous avons vu, les deux états a', b' sont infiniment voisins sur la modification l' et, lorsqu'on parcourt cette modification de m en n, on rencontre l'état a' avant l'état b'.

Soient $\mathfrak{T}$ la température du système pris dans l'état a et $\mathfrak{T}'$ la température du système pris dans l'état a'. Soient dQ la quantité de chaleur dégagée par le système pendant qu'il subit la modification réversible infiniment petite ab et dQ' la quantité de chaleur dégagée par le

système pendant qu'il subit la modification réversible infiniment petite $a'b'$. Nous allons nous proposer de démontrer que l'on a

$$(5) \qquad \frac{dQ}{F(\mathfrak{z})} = \frac{dQ'}{F(\mathfrak{z}')}.$$

Par le point a, menons une ligne isothermique jusqu'au point c où elle rencontre l'espace à adiabatiques réversibles mené par le point b; en général, le point c sera infiniment voisin des deux points a et b. De même, par le point a', menons une ligne isothermique, jusqu'au point c' où elle rencontre l'espace à adiabatiques réversibles mené par le point b'; en général, le point c' sera infiniment voisin des points a' et b'. Nous supposerons réalisées, pour le moment, les hypothèses que nous venons d'indiquer, quitte à revenir plus tard au cas où elles ne le seraient pas.

Joignons les deux points c, b par une ligne infiniment petite tracée en l'espace à adiabatiques réversibles auquel appartiennent ces deux points; joignons de même les deux points c', b' par une ligne infiniment petite tracée en l'espace à adiabatiques réversibles auquel appartiennent ces deux points.

Les lignes ac, cb, $a'c'$, $c'b'$ représentent chacune une modification réversible infiniment petite du système.

Les deux modifications réversibles cb, $c'b'$ sont adiabatiques; lorsque le système subit l'une quelconque d'entre elles, il dégage une quantité de chaleur égale à zéro.

Soient dQ_1 la quantité de chaleur que le système dégage lorsqu'il décrit l'isothermique réversible ac et dQ'_1 la quantité de chaleur que le système dégage lorsqu'il décrit l'isothermique réversible $c'a'$.

Considérons le cycle fermé et réversible $abca$; lorsque le système décrit ce cycle, il dégage une quantité de chaleur $(dQ - dQ_1)$; en appliquant l'égalité (16) (Ire Partie, Chap. III) à chacun des éléments de ce cycle, nous trouverons sans peine l'égalité

$$E(dQ - dQ_1) = \int (A\,d\alpha + B\,d\beta + \ldots + L\,d\lambda + \Theta\,d\mathfrak{z}),$$

l'intégrale s'étendant au cycle $abca$ tout entier.

Soit $(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, \mathfrak{T}_1)$ un des points de ce cycle; soient A_1, $B_1, \ldots, L_1, \Theta_1$ les valeurs que prennent, en ce point, les fonctions A, B, ..., L, Θ; nous pourrons écrire l'égalité précédente

$$\begin{aligned} E(dQ - dQ_1) = A_1 \int d\alpha + B_1 \int d\beta + \ldots + L_1 \int d\lambda + \Theta_1 \int d\mathfrak{T} \\ + \int [(A - A_1)\, d\alpha + (B - B_1)\, d\beta + \ldots \\ + (L - L_1)\, d\lambda + (\Theta - \Theta_1)\, d\mathfrak{T}]. \end{aligned}$$

Mais, comme le cycle est fermé, on a

$$\int d\alpha = 0, \qquad \int d\beta = 0, \qquad \ldots, \qquad \int d\lambda = 0, \qquad \int d\mathfrak{T} = 0.$$

D'autre part, comme les quantités A, B, ..., L, Θ varient par hypothèse d'une manière continue avec la position du point $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{T})$, les quantités

$$(A - A_1), \quad (B - B_1), \quad \ldots, \quad (L - L_1), \quad (\Theta - \Theta_1)$$

sont des quantités infiniment petites, au moins du même ordre que les dimensions du cycle. La quantité

$$\int [(A - A_1)\, d\alpha + (B - B_1)\, d\beta + \ldots + (L - L_1)\, d\lambda + (\Theta - \Theta_1)\, d\mathfrak{T}]$$

est donc un infiniment petit d'ordre supérieur aux dimensions du cycle, en sorte que l'égalité précédente permet d'écrire

$$dQ - dQ_1 = 0. \tag{6}$$

Une démonstration analogue, appliquée au cycle $a'b'c'a'$, donne l'égalité

$$dQ' + dQ'_1 = 0. \tag{7}$$

Faisons maintenant décrire au système :

1° L'isothermique réversible ac, relative à la température $\mathfrak{T}$;

2° L'adiabatique réversible cb;
3° L'adiabatique réversible bb';
4° L'adiabatique réversible $b'c'$;
5° L'isothermique réversible $c'a'$, relative à la température $\mathfrak{T}'$;
6° L'adiabatique réversible $a'a$.

Le système aura décrit un cycle de Carnot réversible entre les températures $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$; à la température $\mathfrak{T}$, il aura dégagé une quantité de chaleur dQ_1; à la température $\mathfrak{T}'$, une quantité de chaleur dQ'_1; on aura donc [Chap. II, égalité (22 *bis*)]

$$\frac{dQ_1}{F(\mathfrak{T})} + \frac{dQ'_1}{F(\mathfrak{T}')} = 0.$$

En vertu des égalités (6) et (7), cette égalité fournit l'égalité (5), que nous voulions démontrer.

Considérons successivement tous les éléments de la transformation l, en allant de m vers n; les éléments qui leur correspondent sur la transformation l' décriront une et une seule fois la transformation l' en allant de m' vers n'. Pour chaque groupe d'éléments correspondants, écrivons l'égalité analogue à l'égalité (5) et ajoutons membre à membre les résultats obtenus; nous trouverons l'égalité

$$(8) \qquad \int_l \frac{dQ}{F(\mathfrak{T})} = \int_{l'} \frac{dQ'}{F(\mathfrak{T}')},$$

qui nous conduit à énoncer la proposition suivante :

Considérons toutes les modifications réversibles (soumises aux restrictions indiquées) qui conduisent le système de l'état m à l'état n, ces deux états étant quelconques; pour toutes ces modifications, l'intégrale

$$\int \frac{dQ}{F(\mathfrak{T})}$$

a la même valeur.

Il s'agit maintenant de lever successivement les diverses restrictions que nous avons admises pour effectuer la démonstration précédente.

Nous avons admis qu'en tout point a de la ligne l on pouvait mener une isothermique rencontrant l'espace à adiabatiques réversibles mené

par le point b, infiniment voisin du point a en un point c, qui soit lui-même infiniment voisin du point a. Cela revient à admettre, on le voit aisément, que la ligne isothermique issue du point a n'est pas tangente au point a à l'espace à adiabatiques réversibles qui passe par ce point. Une hypothèse semblable a été faite pour tout point a' de la ligne l.

En premier lieu, on voit aisément que, s'il existe soit sur la ligne l, soit sur la ligne l', soit sur toutes deux, un nombre limité de points isolés les uns des autres, pour lequel l'hypothèse précédente cesse d'être exacte, le théorème précédent ne sera certainement pas en défaut. Il ne pourrait donc être en défaut que s'il existait sur l'une au moins de ces lignes, la ligne l par exemple, une portion d'étendue finie, la portion fgh, en tout point de laquelle l'isothermique réversible serait tangente à l'espace à adiabatiques réversibles.

Si de semblables conditions sont remplies pour la ligne fgh, deux cas sont à distinguer.

Il est possible que, du point f au point h, on puisse mener des lignes $fg'h$ infiniment voisines de la ligne fgh et qui échappent aux conditions précédentes.

Il est possible au contraire que tous les points de la ligne fgh appartiennent à un domaine D, tracé dans l'espace $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{z}$, et qu'en tout point de ce domaine l'isothermique réversible soit tangente à l'espace à adiabatiques réversibles.

Dans le premier cas, l'intégrale $\int \frac{dQ}{F(\mathfrak{z})}$ étendue à la ligne $mfg'hn$ aura, d'après la démonstration précédente, la même valeur que l'intégrale de même forme étendue à la ligne l'. Sa valeur ne variera donc pas lorsque la ligne $mfg'hn$ variera d'une manière continue de manière à tendre vers la ligne $mfghn$ ou l; or, dans ces conditions, cette intégrale tend certainement vers

$$\int_l \frac{dQ}{F(\mathfrak{z})}.$$

On a donc encore dans ce cas

$$\int_l \frac{dQ}{F(\mathfrak{z})} = \int_{l'} \frac{dQ'}{F(\mathfrak{z}')}.$$

Seul, le second des deux cas que nous venons de distinguer demeure exclu de nos recherches.

Essayons de caractériser ce cas d'une manière plus précise.

Une isothermique réversible satisfait à l'équation différentielle

$$d\mathfrak{T} = 0.$$

Un espace à adiabatiques réversibles est défini par l'équation différentielle

$$(4) \qquad R_\alpha\, d\alpha + R_\beta\, d\beta + \ldots + R_\lambda\, d\lambda + C\, d\mathfrak{T} = 0.$$

Pour qu'en tout point $(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{T})$ du domaine D une isothermique réversible quelconque soit tangente à l'espace à adiabatiques réversibles, il faut et il suffit que l'on ait, en tout point du domaine D,

$$(9) \qquad R_\alpha = 0, \qquad R_\beta = 0, \qquad \ldots, \qquad R_\lambda = 0.$$

Nous excluons donc provisoirement de nos recherches les systèmes qui vérifieraient les égalités (9) *en tous les points d'un domaine d'étendue finie appartenant à l'espace des* $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{T}$.

Nous avons admis jusqu'ici que chacune des deux modifications l et l' ne rencontrait pas en plus d'un point un même espace à adiabatiques réversibles. Nous allons maintenant nous affranchir de cette restriction et admettre que chacune des deux modifications l et l' peut rencontrer un même espace à adiabatiques réversibles en un nombre fini de points, isolés les uns des autres.

Menons l'espace à adiabatiques réversibles $E(m)$ qui passe par le point m et l'espace à adiabatiques réversibles $E(n)$ qui passe par le point n. Ces deux espaces à $(n-1)$ dimensions partagent l'espace à n dimensions en trois régions; une de ces régions est comprise entre les espaces $E(m)$ et $E(n)$; les deux autres sont extérieures. Si l'on mène la droite de manière à rencontrer le point m au point n, et si l'on suit cette droite de manière à rencontrer le point m plus tôt que le point n, avant d'arriver au point m, on se trouve dans une région que je nommerai *la première;* au moment où l'on passe par le point m,

on pénètre dans une région que je nommerai *la deuxième;* au moment où l'on passe par le point n, on quitte cette seconde région pour pénétrer dans une région que je nommerai *la troisième* ([1]).

Il peut arriver que la ligne l ait avec un espace à adiabatiques réversibles E, autre que l'espace E(m) ou l'espace E(n), un point de rencontre p, sans traverser cet espace en ce point de rencontre. Si l'on mène deux espaces à adiabatiques réversibles infiniment voisins de l'espace E, et situés de part et d'autre de cet espace, l'un d'eux n'aura avec la ligne l aucune rencontre infiniment voisine du point p, tandis que l'autre aura avec la ligne l deux rencontres infiniment voisines du point p.

Prenons sur la ligne l tous les points, analogues à p, où la ligne l vient rencontrer un espace à adiabatiques réversibles sans le traverser; prenons de même, sur la ligne l', tous les points où la ligne l' vient rencontrer un espace à adiabatiques réversibles sans le traverser. Par tous ces points, menons des espaces à adiabatiques réversibles. Joints aux espaces E(m) et E(n), ils divisent l'espace en un certain nombre de *sous-régions*.

Tous les espaces à adiabatiques réversibles situés dans une même sous-région rencontrent la ligne l en un même nombre N de points et la ligne l' en un même nombre N′ de points. Si la sous-région considérée fait partie de la deuxième région, les deux nombres N et N′ sont impairs; si la sous-région considérée est située dans la première ou dans la troisième région, N et N′ sont pairs ou nuls.

Considérons une sous-région comprise dans la deuxième région; dans cette sous-région, menons un espace à adiabatiques réversibles E; il rencontre la ligne l en $(2k+1)$ points; numérotons ces points dans l'ordre où les rencontre la ligne l allant du point m au point n; soient $a_1, a_2, \ldots, a_{2k}, a_{2k+1}$ ces points. Ce même espace à adiabatiques réversibles rencontre la ligne l' en $(2k'+1)$ points; numérotons ces points dans l'ordre où les rencontre la ligne l' allant du point m au point n; $a'_1, a'_2, \ldots, a'_{2k'}, a'_{2k'+1}$ ces points.

Sur la ligne l, menée de m vers n, prenons un point b_1 qui soit ren-

---

([1]) Au cas où les deux points m et n seraient sur un même espace à adiabatiques réversibles, la première et la troisième région coïncideraient.

contré infiniment peu après le point a_1, et qui se trouve ainsi dans la même sous-région que le point a_1. Par ce point b_1, menons un espace à adiabatiques réversibles F; d'après ce que nous avons supposé au sujet des espaces à adiabatiques réversibles, l'espace F sera partout infiniment voisin de l'espace E, sans jamais le rencontrer. L'espace F rencontrera la ligne en l en $(2k+1)$ points $b_1, b_2, \ldots, b_{2k}, b_{2k+1}$, respectivement voisins des points $a_1, a_2, \ldots, a_{2k}, a_{2k+1}$; il rencontrera la ligne l' en $(2k'+1)$ points $b'_1, b'_2, \ldots, b'_{2k}, b'_{2k'+1}$, respectivement voisins des points $a'_1, a'_2, \ldots, a'_{2k'}, a'_{2k'+1}$.

Sur la ligne l, menée de m vers n, les points a_i, b_i sont rencontrés dans l'ordre suivant

$$a_1, \quad b_1, \quad b_2, \quad a_2, \quad a_3, \quad b_3, \quad \ldots, \quad b_{2k}, \quad a_{2k}, \quad a_{2k+1}, \quad b_{2k+1}.$$

ce qui nous donne $(2k+1)$ modifications réversibles infiniment petites ayant leur ligne représentative entre les espaces E et F. Ces modifications sont

$$a_1 b_1, \quad b_2 a_2, \quad a_3 b_3, \quad \ldots, \quad b_{2k} a_{2k}, \quad a_{2k+1} b_{2k+1}.$$

Adoptons, pour ces modifications, les notations suivantes :

Modification subie par le système.	Température initiale du système.	Chaleur dégagée par le système.
$a_1 b_1$	$\mathfrak{T}_1$	dQ_1
$b_2 a_2$	$\mathfrak{T}_2$	dQ_2
$a_3 b_3$	$\mathfrak{T}_3$	dQ_3
....	..	...
$b_{2k} a_{2k}$	$\mathfrak{T}_{2k}$	dQ_{2k}
$a_{2k+1} b_{2k+1}$	$\mathfrak{T}_{2k+1}$	dQ_{2k+1}

Sur la ligne l', menée de m vers n, les points a'_i, b'_i sont rencontrés dans l'ordre suivant

$$a'_1, \quad b'_1, \quad b'_2, \quad a'_2, \quad a'_3, \quad b'_3, \quad \ldots, \quad b'_{2k'}, \quad a'_{2k'}, \quad a'_{2k'+1}, \quad b'_{2k'+1},$$

ce qui nous donne $(2k'+1)$ modifications réversibles infiniment pe-

tites ayant leur ligne représentative entre les espaces E et F. Ces modifications sont

$$a'_1 b'_1, \quad b'_2 a'_2, \quad a'_3 b'_3, \quad \ldots, \quad b'_{2k'} a'_{2k'}, \quad a'_{2k'+1} b'_{2k'+1}.$$

Adoptons, pour ces modifications, les notations suivantes :

Modification subie par le système.	Température initiale du système.	Chaleur dégagée par le système.
$a'_1 b'_1$	$\mathfrak{T}'_1$	dQ'_1
$b'_2 a'_2$	$\mathfrak{T}'_2$	dQ'_2
$a_3 b_3$	$\mathfrak{T}'_3$	dQ'_3
....	..	...
$b'_{2k'} a'_{2k'}$	$\mathfrak{T}'_{2k'}$	$dQ'_{2k'}$
$a'_{2k'+1} b'_{2k'+1}$	$\mathfrak{T}'_{2k'+1}$	$dQ'_{2k'+1}$

Considérons les deux transformations $a_1 b_1$ et $b_2 a_2$. Un raisonnement analogue à celui qui nous a fourni l'égalité (5) nous donnera sans peine

$$\frac{dQ_1}{F(\mathfrak{T}_1)} + \frac{dQ_2}{F(\mathfrak{T}_2)} = 0.$$

De même, la considération des deux modifications $a_3 b_3$ et $b_4 a_4$ nous donnera

$$\frac{dQ_3}{F(\mathfrak{T}_3)} + \frac{dQ_4}{F(\mathfrak{T}_4)} = 0.$$

On continuera de même jusqu'à considérer les deux modifications $a_{2k-1} b_{2k-1}$ et $b_{2k} a_{2k}$, qui donneront

$$\frac{dQ_{2k-1}}{F(\mathfrak{T}_{2k-1})} + \frac{dQ_{2k}}{F(\mathfrak{T}_{2k})} = 0.$$

Semblablement, on prouvera que l'on a

$$\frac{dQ'_1}{F(\mathfrak{T}'_1)} + \frac{dQ'_2}{F(\mathfrak{T}'_2)} = 0,$$
$$\frac{dQ'_3}{F(\mathfrak{T}'_3)} + \frac{dQ'_4}{F(\mathfrak{T}'_4)} = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{dQ'_{2k'-1}}{F(\mathfrak{T}_{2k'-1})} + \frac{dQ'_{2k'}}{F(\mathfrak{T}_{2k'})} = 0.$$

Enfin, la comparaison des modifications $a_{2k+1}\,b_{2k+1}$ et $a'_{2k'+1}\,b'_{2k'+1}$ donne l'égalité

$$\frac{dQ_{2k+1}}{F(\mathfrak{T}_{2k+1})} = \frac{dQ'_{2k'+1}}{F(\mathfrak{T}_{2k'+1})}.$$

Ces diverses égalités permettent d'écrire

$$\begin{aligned}&\frac{dQ_1}{F(\mathfrak{T}_1)} + \frac{dQ_2}{F(\mathfrak{T}_2)} + \ldots + \frac{dQ_{2k}}{F(\mathfrak{T}_{2k})} + \frac{dQ_{2k+1}}{F(\mathfrak{T}_{2k+1})}\\ &= \frac{dQ'_1}{F(\mathfrak{T}'_1)} + \frac{dQ'_2}{F(\mathfrak{T}'_2)} + \ldots + \frac{dQ'_{2k'}}{F(\mathfrak{T}'_{2k'})} + \frac{dQ'_{2k'+1}}{F(\mathfrak{T}'_{2k'+1})}.\end{aligned}$$

On peut écrire une égalité analogue pour tout système formé par deux espaces à adiabatiques réversibles infiniment voisins tracés dans la sous-région considérée; on aura donc pour cette sous-région tout entière

$$(10) \qquad \sum \frac{dQ}{F(\mathfrak{T})} = \sum \frac{dQ'}{F(\mathfrak{T}')};$$

dans cette égalité, le premier signe $\sum$ s'étend à tous les éléments de la modification l qui sont situés dans la sous-région considérée et le second à tous les éléments de la modification l' situés dans la même sous-région.

A chaque sous-région comprise dans la deuxième région on peut appliquer un raisonnement semblable qui fournira une égalité analogue, en sorte qu'on peut supposer l'égalité (10) étendue à la deuxième région tout entière.

Considérons maintenant une sous-région comprise soit dans la première, soit dans la troisième région; dans cette sous-région, menons un espace à adiabatiques réversibles E; il rencontre la ligne l en $2k$ points; numérotons ces points dans l'ordre où on les rencontre sur la ligne l en allant du point m au point n; soient $a_1, a_2, \ldots, a_{2k-1}, a_{2k}$ ces points.

Sur la ligne l, menée de m vers n, prenons un point b_1 qui soit rencontré infiniment peu après le point a_1, et qui se trouve ainsi dans la même sous-région que le point a_1; par ce point b_1, menons un espace à adiabatiques réversibles F; d'après ce que nous avons sup-

posé au sujet des espaces à adiabatiques réversibles, l'espace F sera partout infiniment voisin de l'espace E sans jamais le rencontrer. L'espace F rencontrera la ligne l en $2k$ points $b_1, b_2, \ldots, b_{2k-1}, b_{2k}$, respectivement voisins des points $a_1, a_2, \ldots, a_{2k-1}, a_{2k}$.

Sur la ligne l, les points a_i, b_i sont rencontrés dans l'ordre suivant

$$a_1, \quad b_1, \quad b_2, \quad a_2, \quad a_3, \quad b_3, \quad \ldots, \quad a_{2k-1}, \quad b_{2k-1}, \quad b_{2k}, \quad a_{2k},$$

ce qui donne $2k$ modifications réversibles infiniment petites ayant leur ligne représentative comprise entre les espaces E et F; ces modifications sont

$$a_1 b_1, \quad b_2 a_2, \quad a_3 b_3, \quad \ldots, \quad a_{2k-1} b_{2k-1}, \quad b_{2k} a_{2k}.$$

La considération de ces modifications donne aisément les égalités

$$\begin{gathered}
\frac{dQ_1}{F(\mathfrak{T}_1)} + \frac{dQ_2}{F(\mathfrak{T}_2)} = 0, \\
\frac{dQ_3}{F(\mathfrak{T}_3)} + \frac{dQ_4}{F(\mathfrak{T}_4)} = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\frac{dQ_{2k-1}}{F(\mathfrak{T}_{2k-1})} + \frac{dQ_{2k}}{F(\mathfrak{T}_{2k})} = 0,
\end{gathered}$$

qui donnent elles-mêmes l'égalité

$$\frac{dQ_1}{F(\mathfrak{T}_1)} + \frac{dQ_2}{F(\mathfrak{T}_3)} + \ldots + \frac{dQ_{2k}}{F(\mathfrak{T}_{2k})} = 0.$$

On peut écrire une égalité analogue pour tout système formé par deux espaces à adiabatiques réversibles infiniment voisins tracés dans la sous-région considérée; on aura donc, pour cette sous-région tout entière

$$(11) \qquad \sum \frac{dQ}{F(\mathfrak{T})} = 0,$$

le signe $\sum$ s'étendant à tous les éléments de la modification l qui sont situés dans la sous-région considérée.

A chaque sous-région comprise dans la première ou dans la troisième région on peut appliquer un raisonnement semblable qui fournira une égalité analogue, en sorte que l'égalité (11) peut être étendue à l'ensemble de la première et de la troisième région.

On démontrerait de même l'égalité

$$(11\ bis)\qquad \sum \frac{dQ'}{F(\mathfrak{T}')} = 0,$$

dans laquelle le signe $\sum$ s'étend à tous les éléments de la modification l' qui sont situés dans la première ou dans la troisième région.

Des égalités (10), (11) et (11 *bis*), on déduit facilement l'égalité

$$(8)\qquad \int_l \frac{dQ}{F(\mathfrak{T})} = \int_{l'} \frac{dQ'}{F(\mathfrak{T}')}.$$

Il nous reste à lever une dernière restriction.

Nous avons admis que ni la modification l, ni la modification l', ne contenait une portion d'étendue finie tracée en entier en un espace à adiabatiques réversibles.

Supposons maintenant que la modification l présente certaines portions d'étendue finie $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, tracées en entier sur les espaces à adiabatiques réversibles $E_1, E_2, \ldots$; que, de même, la modification l' présente certaines portions d'étendue finie $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots$, tracées en entier sur les espaces à adiabatiques réversibles $E'_1, E'_2, \ldots$.

Pour toute modification adiabatique réversible, on a constamment

$$dQ = 0.$$

On aura donc

$$(12)\qquad \int_{\lambda_1} \frac{dQ}{F(\mathfrak{T})} = 0, \qquad \int_{\lambda_2} \frac{dQ}{F(\mathfrak{T})} = 0, \qquad \ldots,$$

et pareillement

$$(12\ bis)\qquad \int_{\lambda'_1} \frac{dQ'}{F(\mathfrak{T}')} = 0, \qquad \int_{\lambda'_2} \frac{dQ'}{F(\mathfrak{T}')} = 0, \qquad \ldots.$$

On pourra donc, sans modifier la valeur de $\int_l \frac{dQ}{F(\mathfrak{Z})}$ et de $\int_{l'} \frac{dQ'}{F(\mathfrak{Z}')}$, retrancher de la modification l, les portions $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, et de la modification l', les portions $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots$. Il suffira alors de faire figurer les espaces $E_1, E_2, \ldots$ et les espaces $E'_1, E'_2, \ldots$, au nombre de ceux qui limitent les sous-régions, puis de reproduire les raisonnements précédents, pour prouver que l'on a

$$(13) \qquad \sum \frac{dQ}{F(\mathfrak{Z})} = \sum \frac{dQ'}{F(\mathfrak{Z}')},$$

le premier signe $\sum$ s'étendant à tous ceux des éléments de la modification l qui ne sont pas compris dans les portions $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, et le second signe $\sum$ s'étendant à tous ceux des éléments de la modification l' qui ne sont pas compris dans les portions $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots$.

L'ensemble des égalités (12), (12 *bis*) et (13) fournit aisément l'égalité

$$(8) \qquad \int_l \frac{dQ}{F(\mathfrak{Z})} = \int_{l'} \frac{dQ'}{F(\mathfrak{Z}')}.$$

Cette égalité n'est donc plus soumise qu'aux restrictions indiquées au n° **1** et aussi *à cette condition que l'on n'ait pas identiquement, en tous les points d'un domaine d'étendue finie faisant partie de l'espace des* $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{Z}$,

$$(9) \qquad R_\alpha = 0, \qquad R_\beta = 0, \qquad \ldots, \qquad R_\lambda = 0.$$

4. *Propriété des cycles réversibles.* — Imaginons que la modification réversible l ramène le système à son état initial; l'état n est alors identique à l'état m; parmi les autres modifications réversibles l' susceptibles de conduire le système du même état initial au même état final, on peut ranger l'absence de toute modification; dans ce cas, on a évidemment

$$\int_{l'} \frac{dQ'}{F(\mathfrak{Z}')} = 0.$$

L'égalité (8) nous fournit alors ce théorème célèbre de Clausius :

Pour le cycle réversible, on a

$$\int \frac{dQ}{F(\mathfrak{T})} = 0. \tag{14}$$

Supposons en particulier le cycle isothermique; la température $\mathfrak{T}$ demeurant constante le long du parcours du cycle, il en est de même de la fonction $F(\mathfrak{T})$ et l'égalité (14) peut s'écrire

$$\int dQ = 0$$

ou

$$\int (R_\alpha\, d\alpha + R_\beta\, d\beta + \ldots + R_\lambda\, d\lambda) = 0.$$

En vertu des égalités (2), cette égalité devient

$$\int \left(\frac{\partial U}{\partial \alpha}\, d\alpha + \frac{\partial U}{\partial \beta}\, d\beta + \ldots + \frac{\partial U}{\partial \lambda}\, d\lambda\right)$$
$$- \frac{1}{E} \int (A\, d\alpha + B\, d\beta + \ldots + L\, d\lambda) = 0.$$

Mais, pour un cycle isothermique, on a

$$\int \left(\frac{\partial U}{\partial \alpha}\, d\alpha + \frac{\partial U}{\partial \beta}\, d\beta + \ldots + \frac{\partial U}{\partial \lambda}\, d\lambda\right) = 0.$$

L'égalité précédente devient donc

$$\int (A\, d\alpha + B\, d\beta + \ldots + L\, d\lambda) = 0. \tag{15}$$

Lorsqu'un système parcourt un cycle isothermique réversible, les actions extérieures appliquées à ce système effectuent un travail total égal à zéro.

Ce théorème est dû à M. J. Moutier; Clausius et M. J. Moutier en ont fait un fréquent usage. On peut remarquer qu'il est exact même pour les systèmes pour lesquels les égalités (9) seraient vérifiées.

5. *L'entropie.* — L'égalité (8) peut s'énoncer de la manière suivante, en désignant par R_α, R_β, ..., R_λ, C les coefficients calorifiques du système en équilibre :

L'intégrale curviligne

$$\int_l \frac{1}{F(\mathfrak{T})}(R_\alpha\, d\alpha + R_\beta\, d\beta + \ldots + R_\lambda\, d\lambda + C\, d\mathfrak{T})$$

a une valeur qui dépend uniquement du point initial

$$(\alpha_0, \beta_0, \ldots, \lambda_0, \mathfrak{T}_0)$$

et du point final

$$(\alpha_1, \beta_1, \ldots, \lambda_1, \mathfrak{T}_1).$$

On sait que ce théorème équivaut à celui-ci :

Il existe une infinité de fonctions uniformes des variables α, β, ..., λ, $\mathfrak{T}$, *différant les uns des autres par une constante, qui sont telles que l'on ait*

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{R_\alpha}{F(\mathfrak{T})} &= -\frac{\partial S}{\partial \alpha}, \\ \frac{R_\beta}{F(\mathfrak{T})} &= -\frac{\partial S}{\partial \beta}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{R_\lambda}{F(\mathfrak{T})} &= -\frac{\partial S}{\partial \lambda}, \\ \frac{C}{F(\mathfrak{T})} &= -\frac{\partial S}{\partial \mathfrak{T}}, \end{aligned}\right.$$

$S(\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{T})$ *désignant une quelconque de ces fonctions.*

Cette fonction a reçu de Clausius le nom d'*entropie du système.*

Ce théorème peut encore s'énoncer en abrégé de la manière suivante :

Pour toute modification réversible infiniment petite, on a

$$(17)\qquad \frac{dQ}{F(\mathfrak{T})} = dS.$$

Si nous nous souvenons, 1° que les quantités

$$R_\alpha, \quad R_\beta, \quad \ldots, \quad R_\lambda, \quad C$$

ne dépendent pas de celles des variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{T}$, qui déterminent la position absolue du système dans l'espace;

2° Que, dans l'expression

$$R_\alpha \delta\alpha + R_\beta \delta\beta + \ldots + R_\lambda \delta\lambda + C\,\delta\mathfrak{T},$$

celles des variations $\delta\alpha, \delta\beta, \ldots, \delta\lambda, \delta\mathfrak{T}$ qui déterminent seulement le changement de position absolue du système dans l'espace ne figurent pas; nous voyons sans peine que l'entropie ne dépend pas de la position absolue du système dans l'espace.

6. *Sur le cas réservé dans ce qui précède.* — Revenons au cas où, en tous les points d'un domaine D faisant partie de l'espace des α, $\beta, \ldots, \mathfrak{T}$, on aurait identiquement

$$(9) \qquad R_\alpha = 0, \qquad R_\beta = 0, \qquad \ldots, \qquad R_\lambda = 0$$

et cherchons si les théorèmes précédents peuvent être encore appliqués dans ce cas.

En premier lieu, il est évident qu'ils peuvent l'être si l'on n'envisage que des modifications isothermiques du système; car alors on aura, pour toute modification réversible,

$$dQ = 0,$$

et, partant,

$$\frac{dQ}{F(\mathfrak{T})} = dS,$$

en désignant par S une fonction quelconque de la température.

Ce cas particulier est important, car c'est en réalité celui que l'on envisage dans la Mécanique rationnelle classique; en effet, dans l'exposé classique de la Mécanique rationnelle, on omet la notion de température (ce qui n'est admissible que si la température est supposée invariable) et l'on omet aussi la notion de quantité de chaleur

dégagée par le système; ce qui n'est admissible que si les égalités (9) sont vérifiées.

Dans ce cas, les égalités (2) et (9) donnent

$$(18)\qquad A = E\frac{\partial U}{\partial \alpha},\qquad B = A\frac{\partial U}{\partial \beta},\qquad \ldots,\qquad L = E\frac{\partial U}{\partial \lambda}.$$

C'est la forme qu'il convient d'attribuer dans ce cas aux conditions d'équilibre (1). Le produit EU représente ce que les mécaniciens appellent le *potentiel des forces intérieures*.

Mais ne supposons plus la température invariable. Nous allons prouver que, *s'il existe un domaine* D *où les égalités* (9) *soient vérifiées, pour qu'il existe une fonction* S, *uniforme et continue, des variables* $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{T}$, *telle que, dans tout le champ de ces variables, on puisse écrire*

$$(16)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{R_\alpha}{F(\mathfrak{T})} &= -\frac{\partial S}{\partial \alpha},\\ \frac{R_\beta}{F(\mathfrak{T})} &= -\frac{\partial S}{\partial \beta},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \frac{R_\lambda}{F(\mathfrak{T})} &= -\frac{\partial S}{\partial \lambda},\\ \frac{C}{F(\mathfrak{T})} &= -\frac{\partial S}{\partial \mathfrak{T}},\end{aligned}\right.$$

il faut et il suffit que, dans tout le domaine D, *la capacité calorifique* C *soit fonction de la seule température* $\mathfrak{T}$.

Si le domaine D n'occupe pas le champ entier des variables α, $\beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{T}$, c'est le seul cas où le théorème ne soit pas évident) on pourra toujours découper la partie de ce champ extérieure au domaine D en espaces simplement connexes; à l'intérieur de chacun de ces espaces, les démonstrations précédentes s'appliqueront; elles permettent d'écrire des égalités analogues aux égalités (16), lesquelles entraînent à leur tour des égalités du type

$$(18)\qquad \frac{\partial}{\partial \beta}\left[\frac{R_\alpha}{F(\mathfrak{T})}\right] = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{R_\beta}{F(\mathfrak{T})}\right]$$

et des égalités du type

$$(18\,bis)\qquad \frac{\partial}{\partial \mathfrak{T}}\left[\frac{R_\alpha}{F(\mathfrak{T})}\right] = \frac{\partial}{\partial \alpha}\left[\frac{C}{F(\mathfrak{T})}\right].$$

D'autre part, pour que dans le domaine D, où les égalités (9) sont vérifiées, on puisse écrire les égalités (18) et (18 *bis*), il faut et il suffit que la quantité

$$\frac{dQ}{F(\mathfrak{T})} = \frac{C}{F(\mathfrak{T})}\,d\mathfrak{T}$$

soit une différentielle totale et, partant, que la quantité C soit une fonction de la seule température $\mathfrak{T}$.

D'ailleurs, le champ des variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{T}$, étant supposé simplement connexe, pour qu'il existe une fonction S, *uniforme* et continue, des variables $\alpha, \beta, \ldots, \lambda, \mathfrak{T}$, vérifiant les égalités (16), il faut et il suffit que les égalités (18) et (18 *bis*) soient vérifiées dans tout ce champ.

Ainsi, *si nous admettons que, dans tout domaine* D *où les égalités* (9) *sont vérifiées, la capacité calorifique du système est fonction de la température seule,* les théorèmes démontrés dans le présent Chapitre seront soumis seulement aux restrictions énoncées au n° **1**.

Théorie générale des surfaces hyperelliptiques (¹);

PAR M. G. HUMBERT.

TROISIÈME PARTIE.

SURFACES HYPERELLIPTIQUES GÉNÉRALES.

CHAPITRE I.

Premières propriétés.

101. Nous abordons maintenant l'étude des surfaces hyperelliptiques générales, dont M. Picard a déjà fait connaître quelques propriétés importantes (²); nous donnerons d'abord des propositions géométriques applicables à l'ensemble de ces surfaces; nous insisterons ensuite avec plus de détails sur certaines catégories de surfaces ou sur certaines surfaces particulières.

Dans tout ce qui suit, nous désignerons par $\mathfrak{S}$ une surface hyperelliptique générale; nous savons (n° **2**) que les coordonnées homogènes d'un de ses points, x_1, x_2, x_3, x_4, sont proportionnelles à quatre fonctions thêta normales d'un même ordre, h, et de caractéristique nulle; nous donnerons à ces fonctions (fonctions coordonnées) les notations $x_1(u, v)$, $x_2(u, v)$, $x_3(u, v)$, $x_4(u, v)$.

(¹) *Voir* même Tome, p. 29.

(²) *Journal de Mathém.*, 4e série, t. I, p. 312 et suiv.; t. V, p. 223 et suiv.

102. En général, c'est-à-dire si les quatre fonctions $x(u, v)$ sont arbitraires, à un point de $\mathfrak{S}$ ne correspond, aux multiples près des périodes, qu'un seul système de valeurs des paramètres u, v; nous dirons en ce cas que *la surface est représentable point par point sur le champ hyperelliptique*.

M. Picard a démontré qu'une telle surface est de genre un; l'intégrale double $\int\int du\,dv$ est en effet, sur la surface $\mathfrak{S}$, de la forme

$$\int\int \varphi(x, y, z)\,dx\,dy,$$

où φ est une fonction rationnelle des coordonnées cartésiennes x, y, z, c'est-à-dire $\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}$, d'un point de $\mathfrak{S}$.

Il y a donc une intégrale de cette dernière forme qui reste finie sur toute la surface; il ne peut en exister une seconde, car toute intégrale $\int\int \varphi(x, y, z)\,dx\,dy$, quand on y remplace x, y, z par leurs valeurs en u et v, prend la forme $\int\int F(u, v)\,du\,dv$, où $F(u, v)$ est une fonction quadruplement périodique uniforme de u, v, et cette intégrale ne peut rester finie que si $F(u, v)$ est une constante.

Il est à observer que la démonstration s'applique aussi au cas où à chaque point de $\mathfrak{S}$ correspondent les deux couples d'arguments u, v et $-u$, $-v$, comme cela se produit pour la surface de Kummer [1]. En effet, x, y, z sont alors des fonctions quadruplement périodiques *paires* de u, v et toute fonction quadruplement périodique paire aux mêmes périodes pourra s'exprimer rationnellement en x, y, z : il en est ainsi, en particulier, de la fonction $\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$, et comme on a

$$\int\int du\,dv = \int\int \frac{dx\,dy}{\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}},$$

---

[1] Nous verrons plus tard qu'on peut ramener à ce cas le cas plus général où, à chaque point de $\mathfrak{S}$, correspondent *deux* couples d'arguments, abstraction faite des multiples des périodes.

on voit que l'intégrale

$$\int\int du\,dv$$

est bien de la forme

$$\int\int \varphi(x, y, z)\,dx\,dy,$$

φ étant rationnel. Il existe donc sur la surface une intégrale double rationnelle ne devenant pas infinie et l'on démontre comme plus haut qu'il n'en existe qu'une : la surface est encore de genre un.

103. Une intégrale double rationnelle qui reste finie en tous les points d'une surface algébrique $S(x, y, z) = 0$, d'ordre n, est, comme l'on sait, de la forme

$$\int\int \frac{D(x, y, z)}{S'_z}\,dx\,dy,$$

$D(x, y, z)$ étant un polynôme d'ordre $n - 4$; la surface $D = 0$ est une *surface adjointe* de la surface $S = 0$, c'est-à-dire que toute courbe multiple d'ordre l de la surface $S = 0$ est multiple d'ordre $l - 1$ sur $D = 0$, et que tout point multiple d'ordre l sur $S = 0$ est multiple d'ordre $l - 2$ sur $D = 0$.

Il résulte de là que la surface hyperelliptique $\mathfrak{S}$ admet une et une seule surface adjointe, de degré inférieur au sien de quatre unités.

Dans tout ce qui suit nous désignerons par $\mathfrak{D}$ cette surface adjointe; $D = 0$ sera son équation, et $S = 0$ sera l'équation de $\mathfrak{S}$.

D'après ce qui précède, on aura

$$\int\int \frac{D}{S'_z}\,dx\,dy = \int\int du\,dv;$$

d'où

$$(1) \qquad \frac{D}{S'_z}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) = 1.$$

104. Une propriété fondamentale des surfaces représentables point par point sur le champ hyperelliptique est, comme l'a montré M. Picard, de posséder deux intégrales de différentielles totales de

première espèce : ce sont les intégrales $\int du$ et $\int dv$. Il est clair en effet qu'on a, en chaque point de $\mathfrak{S}$,

$$du = M\,dx + N\,dy, \qquad dv = M_1\,dx + N_1\,dy,$$

M, N, M_1, N_1 étant des fonctions rationnelles de x, y, z. M. Picard a fait voir que leur dénominateur commun est S'_z, et qu'on peut écrire

$$du = \frac{B\,dx - A\,dy}{S'_z}, \qquad dv = \frac{B_1\,dx - A_1\,dy}{S'_z},$$

A, B, A_1, B_1 étant des polynômes entiers en x, y, z d'une forme particulière.

D'après cela on a, sur la surface $\mathfrak{S}$,

$$\int\int du\,dv = \int\int \frac{dx\,dy}{S'^2_z}(BA_1 - AB_1)$$

et, en comparant cette forme à celle du numéro précédent, on trouve avec M. Picard

$$(2) \qquad DS'_z = BA_1 - AB_1.$$

Cette relation importante, vérifiée en tous les points de la surface $S = 0$, nous sera utile à chaque instant.

105. Revenons à l'expression des coordonnées homogènes d'un point de $\mathfrak{S}$ à l'aide des fonctions thêta [1] : soit h l'ordre des quatre

---

[1] On peut se demander si la surface $\mathfrak{S}$ est susceptible de plusieurs modes de représentation hyperelliptique, c'est-à-dire si, le tétraèdre de référence restant le même, les coordonnées x_1, x_2, x_3, x_4 peuvent être proportionnelles à quatre autres fonctions thêta de caractéristique nulle $x'_1(u, v)$, $x'_2(u, v)$, ..., $x'_4(u, v)$, aux mêmes paires de périodes que $x_1(u, v)$, ..., $x_4(u, v)$. Cette question revient évidemment à cette autre : la surface $\mathfrak{S}$ admet-elle des transformations birationnelles en elle-même? Soit alors (u, v) un point de $\mathfrak{S}$; (u', v') le point transformé; on aura nécessairement, puisque du et dv sont les seules dif-

fonctions $x_j(u, v)$; si ces fonctions n'ont pas de zéro commun, c'est-à-dire si elles ne s'annulent simultanément pour aucun système de valeurs de u, v, le *degré* de $\mathfrak{S}$ sera égal à $2h^2$. En effet, une droite quelconque, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, par exemple, coupe $\mathfrak{S}$ en des points dont les arguments sont les solutions communes aux équations

$$x_1(u, v) = 0, \qquad x_2(u, v) = 0,$$

et ces solutions sont au nombre de $2h^2$, d'après le théorème de M. Poincaré. Cela suppose, bien entendu, que $\mathfrak{S}$ est représentable point par point sur le champ hyperelliptique.

Si les quatre fonctions $x_j(u, v)$ s'annulent simultanément pour un ou plusieurs systèmes de valeurs des arguments u, v, le degré de $\mathfrak{S}$

---

férentielles totales de première espèce sur la surface

$$du' = \alpha\, du + \beta\, dv,$$
$$dv' = \gamma\, du + \delta\, dv,$$

α, β, γ, δ étant des constantes. On en tire

$$u' = \alpha u + \beta v + \lambda,$$
$$v' = \gamma u + \delta v + \mu.$$

Pour que u' et v' aient les mêmes systèmes de périodes simultanées que u et v, il faut que α, β, γ, δ soient entiers; si l'on suppose de plus, comme nous l'avons fait jusqu'ici, qu'il n'y a pas de relation linéaire à coefficients entiers entre les périodes a, b, c, $2\pi i$, on voit qu'il est nécessaire que β et γ soient nuls. Enfin, pour qu'à un point (u', v') corresponde un seul point (u, v), il faut que α et δ soient égaux simultanément à ± 1.

On a donc les deux types de transformation

$$u' = \pm u + \lambda,$$
$$v' = \pm v + \mu,$$

les signes supérieurs ou inférieurs étant pris ensemble.

Il en résulte que la surface $\mathfrak{S}$ n'admet qu'un seul mode de représentation hyperelliptique, si l'on ne considère pas comme distinctes les représentations qui se déduisent de l'une d'elles en substituant u' et v' à u et v. Une telle substitution n'altère pas d'ailleurs, comme on le voit de suite, l'ordre h des fonctions $x_j(u, v)$ de la représentation; la quantité h est donc un nombre lié à $\mathfrak{S}$: nous en verrons la signification géométrique au n° 145.

devient inférieur à $2h^2$; nous reviendrons plus tard là-dessus, nous bornant à signaler ici les particularités intéressantes qui se présentent dans cette hypothèse.

Il est clair d'abord, et c'est là un résultat bien connu dans la théorie des surfaces représentables sur un plan, que si les quatre fonctions $x_j(u, v)$ s'annulent pour $u = u_0$, $v = v_0$, ainsi que toutes leurs dérivées partielles par rapport à u et v jusqu'à l'ordre k exclusivement, il correspond en général sur la surface $\mathfrak{S}$, au système d'arguments u_0, v_0, non pas un seul point, mais tous les points d'une courbe unicursale d'ordre k. On a en effet, en posant $u = u_0 + \varepsilon$, $v = v_0 + \eta$, ε et η étant très petits,

$$x_j(u, v) = a_j \varepsilon^k + b_j \varepsilon^{k-1} \eta + \ldots + l_j \eta^k + p_j \varepsilon^{k+1} + \ldots$$
$$(j = 1, 2, 3, 4),$$

a_j, b_j, ... désignant des constantes. Ces développements montrent que le point de $\mathfrak{S}$ qui correspond aux arguments $u_0 + \varepsilon$, $v_0 + \eta$ décrit la courbe unicursale définie par les équations

$$\rho x_j = a_j \lambda^k + b_j \lambda^{k-1} + \ldots + l_j,$$

λ désignant un paramètre variable.

Nous appellerons cette courbe *courbe unicursale singulière*.

Les courbes unicursales singulières (courbes ausgezeichnete de M. Nöther) jouent un rôle important dans la théorie des surfaces hyperelliptiques; M. Picard a démontré tout d'abord que la surface $\mathfrak{S}$ est coupée par son adjointe $\mathfrak{D}$ suivant ses courbes multiples et suivant les courbes unicursales singulières.

Nous présenterons cette démonstration de la manière suivante, afin de pouvoir lui donner une certaine extension.

106. Considérons en premier lieu la relation (1),

$$D(x, y, z)\left(\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}\right) = S'_z.$$

Elle montre que les points de $\mathfrak{S}$, non situés sur $S'_z = 0$, et dont les

coordonnées annulent $D(x, y, z)$, rendent infinie la fonction

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}.$$

Cette fonction peut s'écrire, si l'on remplace x et y par leurs valeurs $\frac{x_1}{x_4}$ et $\frac{x_2}{x_4}$,

$$\frac{1}{x_4^3}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_4 \\ \frac{\partial x_1}{\partial u} & \frac{\partial x_2}{\partial u} & \frac{\partial x_4}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1}{\partial v} & \frac{\partial x_2}{\partial v} & \frac{\partial x_4}{\partial v} \end{vmatrix};$$

elle devient infinie sur $\mathfrak{S}$ le long de la courbe $x_4 = 0$, et ne peut le devenir le long d'aucune autre courbe, les courbes unicursales singulières exceptées. Or la surface $D = 0$ ne passe pas par la courbe $x_4 = 0$, si le tétraèdre de référence a été choisi arbitrairement; elle ne peut donc couper $\mathfrak{S}$ que suivant des courbes unicursales singulières et des courbes situées sur la surface $S'_z = 0$. Mais celle-ci rencontre évidemment $\mathfrak{S}$: 1° suivant les courbes multiples; 2° suivant d'autres courbes dont la définition dépend du choix du tétraèdre de référence, et qui dès lors ne peuvent être sur $\mathfrak{D}$, si ce tétraèdre est quelconque : on voit ainsi que les surfaces $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{D}$ ne peuvent avoir en commun, en dehors des courbes multiples, que des courbes unicursales singulières.

Réciproquement soit une de ces dernières courbes, il s'agit d'établir qu'elle est sur $\mathfrak{D}$.

Reprenons à cet effet les relations (n° **104**)

$$(3) \qquad S'_z\,du = B\,dx - A\,dy; \qquad S'_z\,dv = B_1\,dx - A_1\,dy;$$
$$BA_1 - AB_1 = DS'_z.$$

Le long d'une courbe unicursale singulière, u et v sont constants; du et dv sont donc nuls et par suite on a $BA_1 - AB_1 = 0$. La dernière relation montre alors que la courbe unicursale singulière est sur la surface $DS'_z = 0$, c'est-à-dire sur l'une au moins des surfaces $D = 0$, $S'_z = 0$. Or elle ne peut être sur $S'_z = 0$, le tétraèdre des coordonnées étant quelconque, que si elle est une ligne multiple de $\mathfrak{S}$, et en ce cas

nous savons qu'elle est encore sur $\mathfrak{D}$. La proposition est donc démontrée.

107. Il est à observer que cette dernière partie de la démonstration suppose essentiellement que $\mathfrak{S}$ est représentable point par point sur le champ hyperelliptique, les formules (3) n'étant valables que dans cette hypothèse; *si nous supposons qu'à un point de* $\mathfrak{S}$ *correspondent les couples d'arguments* u, v et $-u$, $-v$, on doit la modifier comme il suit.

Les coordonnées x, y, z d'un point de $\mathfrak{S}$ sont alors des fonctions quadruplement périodiques paires de u, v; dès lors leurs dérivées premières par rapport à u et v sont impaires.

On a d'ailleurs

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv,$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}\,du + \frac{\partial y}{\partial v}\,dv.$$

Pour tirer du et dv de ces équations, multiplions les deux membres de chacune d'elles par une même fonction quadruplement périodique, *impaire* $F(u, v)$: le carré de cette fonction sera une fonction rationnelle, $\frac{P}{Q}$, de x, y, z, et de même les produits de $F(u, v)$ par $\frac{\partial x}{\partial u}$, $\frac{\partial x}{\partial v}$, $\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial y}{\partial v}$ étant des fonctions quadruplement périodiques *paires*, seront rationnels en x, y, z. On a ainsi, en tous les points de la surface $\mathfrak{S}$, *pour lesquels la fonction* $F(u, v)$ *n'est ni nulle ni infinie*,

$$dx\sqrt{\frac{P}{Q}} = M\,du + N\,dv,$$

$$dy\sqrt{\frac{P}{Q}} = M_1\,du + N_1\,dv,$$

M, N, M_1, N_1 étant rationnels en x, y, z. On en tire

$$du = \sqrt{\frac{P}{Q}}\,(G\,dx + H\,dy),$$

$$dv = \sqrt{\frac{P}{Q}}\,(G_1\,dx + H_1\,dy),$$

G, H, G_1, H_1 étant également rationnels. Cela posé, le long d'une courbe unicursale singulière,

$$du = 0, \qquad dv = 0,$$

et par suite, en éliminant dx et dy,

$$\frac{P}{Q}(GH_1 - HG_1) = 0.$$

Nous savons d'ailleurs qu'on a, sur la surface $\mathfrak{S}$,

$$\frac{D}{S'_z} = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \frac{P}{Q}(GH_1 - HG_1),$$

ce qui montre que $D(x, y, z)$ s'annule en tous les points des courbes unicursales singulières, comme dans le cas général.

Il n'y a d'exception à ce raisonnement que si la fonction $F(u, v)$ est nulle ou infinie le long d'une courbe unicursale singulière, c'est-à-dire si $F(u_0, v_0)$ est nul ou infini, en désignant toujours par u_0, v_0 les valeurs des arguments qui correspondent à tous les points de la courbe. Or $F(u, v)$ est une fonction impaire *quelconque*, quadruplement périodique; elle est toujours nulle ou infinie pour les seize demi-périodes, comme on le voit sans difficulté; il est clair d'ailleurs que les fonctions quadruplement périodiques impaires ne deviennent *toutes* nulles ou infinies pour aucun autre système de valeurs, u_0, v_0, de u et de v; notre analyse établit donc que *la surface* $D(x, y, z) = 0$ *passe par toutes les courbes unicursales singulières de* $\mathfrak{S}$, *celles qui correspondent à des demi-périodes exceptées.*

Nous rencontrerons plus tard des exemples de l'exception intéressante indiquée ici.

108. Dans tout ce qui suit, nous supposerons, sauf avis contraire, que la surface $\mathfrak{S}$ est représentable point par point sur le champ hyperelliptique.

Toutes les surfaces $\mathfrak{S}$, dont les coordonnées des points s'expriment par des fonctions quadruplement périodiques uniformes aux mêmes périodes, se correspondent point par point, de telle sorte qu'à une

courbe $\Theta(u, v) = 0$, tracée sur l'une, correspondent sur les autres les courbes représentées par la même équation $\Theta(u, v) = 0$. Il résulte de cette remarque que la courbe $\Theta(u, v) = 0$ jouira d'un certain nombre de propriétés indépendantes de la définition de la surface hyperelliptique sur laquelle on la suppose tracée : telles seront les propriétés qui se rattachent à la notion de genre, et qui possèdent le caractère d'invariance dans les transformations birationnelles. On peut constituer ainsi une *Géométrie des courbes algébriques dans le champ hyperelliptique*, et c'est cette étude que nous allons tout d'abord esquisser.

CHAPITRE II.

Géométrie des courbes dans le champ hyperelliptique.

109. Nous appellerons *courbe algébrique* du champ hyperelliptique toute courbe tracée sur une surface hyperelliptique représentable, point par point, sur le champ (n° **102**), et qui n'est ni une ligne multiple, ni une courbe unicursale singulière de la surface.

La propriété caractéristique des courbes algébriques ainsi définies est de posséder deux intégrales abéliennes de première espèce, $\int du$ et $\int dv$, n'ayant que quatre paires de périodes simultanées; il est clair, en effet, puisque $\int du$ et $\int dv$ sont, sur la surface hyperelliptique, des intégrales de différentielles totales de première espèce, qu'elles seront des intégrales abéliennes de première espèce le long de toute courbe, non multiple, tracée sur la surface. Nous disons non multiple parce qu'à un point d'une courbe multiple correspondent plusieurs systèmes de valeurs de u et de v, et que du et dv peuvent, dès lors, n'être plus des différentielles abéliennes. Il est également évident que les courbes unicursales singulières doivent être exclues de la catégorie des courbes du champ hyperelliptique.

Cela posé, rappelons (n° **8**) que, sur une surface hyperelliptique, l'équation d'une courbe algébrique peut toujours se mettre sous la

forme

$$\Theta(u-\lambda, v-\mu)=0,$$

où λ et μ sont des constantes, et $\Theta(u, v)$ une fonction thêta de caractéristique nulle.

Introduisons de plus, pour simplifier le langage, les définitions suivantes :

Nous appellerons *courbes de même ordre,* dans le champ hyperelliptique, l'ensemble des courbes dont les équations sont de la forme

$$\Theta(u-\lambda, v-\mu)=0,$$

où $\Theta(u, v)$ est une fonction thêta d'un ordre donné; parmi les courbes d'un même ordre, nous appellerons *courbes d'une même famille* celles dont l'équation peut être mise sous la forme

$$\Theta(u-\lambda, v-\mu)=0,$$

où $\Theta(u, v)$ est une fonction à caractéristique nulle, d'un ordre donné, et où λ et μ sont des constantes données [1].

Si les équations de deux courbes s'obtiennent respectivement en égalant à zéro deux fonctions Θ, d'ordres m et n, la première sera dite *d'ordre supérieur ou inférieur* à l'ordre de la seconde, selon que m sera plus grand ou plus petit que n.

110. *Remarque I.* — Il convient d'observer que, sur une surface hyperelliptique $\mathfrak{S}$, les courbes dont l'équation est de la forme

$$\Theta(u-\lambda, v-\mu)=0,$$

$\Theta(u, v)$ désignant une fonction thêta quelconque, d'ordre m, seront de même ordre, dans le sens ordinaire de ce mot, c'est-à-dire de même degré. En effet, si les coordonnées homogènes x_1, x_2, x_3, x_4

---

[1] Ces définitions concordent avec celles que nous avons données des courbes d'un même ordre et d'une même famille — univoques ou non — sur la surface de Kummer.

d'un point de $\mathfrak{S}$ sont des fonctions thêta (à caractéristique nulle), d'ordre h, le degré de la courbe $\Theta(u-\lambda, v-\mu)=0$ sera égal au nombre des solutions communes aux deux équations

$$x_j(u, v)=0, \qquad \Theta(u-\lambda, v-\mu)=0,$$

c'est-à-dire à $2mh$. Toutefois, si les quatre coordonnées $x_j(u, v)$ ont des zéros communs u_0, v_0; u_1, v_1; ..., la courbe précédente sera d'ordre inférieur à $2mh$ quand la fonction $\Theta(u-\lambda, v-\mu)$ s'annulera pour un ou plusieurs des systèmes de valeurs u_0, v_0; ...; mais $2mh$ sera toujours le degré de la courbe obtenue en égalant à zéro la fonction thêta la plus générale d'ordre m.

111. *Remarque II.* — D'après la remarque faite au n° **11**, si $\Theta(u, v)$ et $\Theta_0(u, v)$ désignent deux fonctions quelconques d'ordre m, à caractéristique nulle, les deux courbes du même ordre

$$\Theta_0(u-\lambda_0, v-\mu_0)=0, \qquad \Theta(u-\lambda, v-\mu)=0$$

appartiendront à la même famille, si les constantes λ, μ, λ_0, μ_0 vérifient les relations

$$m(\lambda-\lambda_0)=0, \qquad m(\mu-\mu_0)=0 \qquad \text{(mod. périodes)}.$$

112. *Remarque III.* — Soient $\Theta_1(u, v)$, $\Theta_2(u, v)$, ..., $\Theta_\rho(u, v)$ des fonctions thêta de caractéristique nulle et d'ordres respectifs $m_1, m_2, \ldots, m_\rho$. La fonction

$$\Theta_1(u-\lambda_1, v-\mu_1)\Theta_2(u-\lambda_2, v-\mu_2)\ldots\Theta_\rho(u-\lambda_\rho, v-\mu_\rho)$$

où les λ_i, μ_i sont des constantes, pourra, comme on le voit de suite en écrivant les relations auxquelles elle satisfait quand on augmente u et v de périodes simultanées, se mettre sous la forme

$$\Theta(u-\lambda, v-\mu),$$

où $\Theta(u, v)$ est une fonction de caractéristique nulle, d'ordre

$m_1 + m_2 + \ldots + m_\rho$ et où les constantes λ et μ vérifient les relations

$$\lambda(m_1 + m_2 + \ldots + m_\rho) = m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + \ldots + m_\rho\lambda_\rho,$$
$$\mu(m_1 + m_2 + \ldots + m_\rho) = m_1\mu_1 + m_2\mu_2 + \ldots + m_\rho\mu_\rho.$$

113. Les deux courbes

$$\Theta(u - \lambda, v - \mu) = 0, \qquad \Theta(u - \lambda', v - \mu') = 0$$

se correspondent point par point (n° **91**); on peut, pour étudier, dans le champ hyperelliptique, les propriétés des courbes d'un même ordre et d'une même famille, faire choix d'une famille particulière; nous choisirons, dans ce qui suit, celle qui correspond à $\lambda = 0$, $\mu = 0$; mais nos raisonnements, absolument généraux, s'étendront à toutes les courbes et à toutes les familles de courbes du champ hyperelliptique.

114. Nous savons que $\int du$ et $\int dv$ sont des intégrales abéliennes de première espèce le long d'une courbe quelconque du champ hyperelliptique; il est aisé de trouver l'expression des autres intégrales de première espèce appartenant à cette courbe.

Soit, en effet, $\Theta_0(u, v) = 0$ l'équation de la courbe considérée, Θ_0 désignant une fonction thêta d'ordre m, de caractéristique nulle; désignons par $\Theta(u, v)$ une autre fonction, quelconque d'ailleurs, de même ordre et de même caractéristique, l'intégrale

$$(1) \qquad \int \frac{\Theta(u, v)}{\left(\frac{\partial \Theta_0}{\partial v}\right)} du,$$

prise le long de la courbe $\Theta_0 = 0$, est une intégrale abélienne de première espèce.

Elle est abélienne comme l'établit le raisonnement fait au n° **92**, répété mot pour mot; elle est de première espèce, car elle ne peut devenir infinie qu'aux points de la courbe qui annulent $\frac{\partial \Theta_0}{\partial v}$. Or la rela-

tion

$$\frac{\partial\Theta_0}{\partial u}\,du + \frac{\partial\Theta_0}{\partial v}\,dv = 0$$

montre que l'intégrale ne deviendra infinie que s'il existe sur la courbe $\Theta(u, v) = 0$ des points dont les arguments vérifient les équations

$$\frac{\partial\Theta_0}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial\Theta_0}{\partial v} = 0,$$

c'est-à-dire des points doubles, ou plus généralement des points *singuliers* d'un ordre quelconque

Si donc la courbe $\Theta_0(u, v) = 0$ n'a pas de tels points singuliers, l'intégrale ci-dessus est de première espèce. Or les fonctions $\Theta(u, v)$, d'ordre m et de caractéristique nulle, s'expriment en fonction linéaire et homogène de m^2 d'entre elles, parmi lesquelles figure la fonction $\Theta_0(u, v)$: il en résulte qu'on obtient, sous la forme (4), $m^2 - 1$ intégrales abéliennes de première espèce linéairement distinctes, ce qui donne en tout, avec $\int du$ et $\int dv$, $m^2 + 1$ intégrales de première espèce.

Il est aisé de voir qu'on a obtenu ainsi *toutes* les intégrales de cette nature linéairement distinctes, c'est-à-dire que le genre p de la courbe proposée est égal à $m^2 + 1$. En effet, les deux courbes

$$\Theta_0(u, v) = 0 \qquad \text{et} \qquad \Theta(u, v) = 0$$

ont $2m^2$ points communs, qui varient tous avec $\Theta(u, v)$; d'un autre côté, on sait qu'une différentielle abélienne de première espèce appartenant à une courbe de genre p s'annule en $2(p - 1)$ points de celle-ci. On a donc, d'après la forme (4) de l'intégrale,

$$2(p - 1) = 2m^2, \qquad \text{d'où} \qquad p = m^2 + 1.$$

Nous pouvons énoncer maintenant ce théorème :

Dans le champ hyperelliptique, les courbes d'un même ordre et d'une même famille, sans point singulier, découpent l'une sur l'autre des groupes $\mathcal{G}_{2(p-1)}$.

Dans cet énoncé et dans toutes les recherches qui vont suivre, quand nous parlons de systèmes de courbes dans le champ hyperelliptique, il s'agit de courbes tracées sur une *même* surface hyperelliptique quelconque d'ailleurs; les points communs à deux courbes sont ceux dont les arguments u, v vérifient les équations de ces courbes.

La réciproque de la proposition précédente n'est pas vraie; il y a, sur une courbe du champ hyperelliptique, à cause de l'existence des deux intégrales de première espèce $\int du$ et $\int dv$, d'autres groupes $\mathcal{G}_{2(p-1)}$ que ceux découpés par les courbes du même ordre et de la même famille.

115. *Remarque.* — Il importe d'observer, pour appliquer le théorème ci-dessus, que tous les *points multiples* d'une courbe algébrique tracée sur une surface hyperelliptique ne sont pas nécessairement des *points singuliers* dans l'acception indiquée plus haut. Ainsi, par exemple, une surface hyperelliptique $\mathfrak{S}$ a généralement une courbe double, et toute section plane $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0$ de $\mathfrak{S}$ a des points doubles aux points où elle coupe la courbe double; mais, dans le champ hyperelliptique, ces points ne sont pas singuliers si les fonctions $x_j(u, v)$, qui définissent les coordonnées d'un point de $\mathfrak{S}$, ne sont soumises à aucune condition particulière.

116. On peut donner quelques propositions simples, relativement aux groupes de points découpés sur une courbe du champ hyperelliptique sans point singulier, par certains systèmes de courbes mobiles.

Observons d'abord que sur une courbe fixe, $\Theta_0(u, v) = 0$, les courbes d'un même ordre et d'une même famille découpent des groupes équivalents, car, si

$$\rho_1\theta_1(u - \lambda, v - \mu) + \rho_2\theta_2(u - \lambda, v - \mu) + \ldots = 0$$

est l'équation générale des courbes sécantes, λ et μ désignant des constantes fixes et ρ_1, ρ_2, ... des constantes variables d'une courbe à l'autre, il est clair que la somme des valeurs que prend une différentielle abélienne de première espèce appartenant à la courbe fixe $\Theta_0 = 0$, aux points communs à cette courbe et à l'une des courbes mobiles, est

de la forme

$$A_1 d\rho_1 + A_2 d\rho_2 + \ldots,$$

les A étant des fonctions rationnelles de $\rho_1, \rho_2, \ldots$. Pour que cette dernière expression reste finie, il est nécessaire que $A_1 = A_2 = \ldots = 0$. Par suite (n° **85**), les groupes formés par les points communs à la courbe fixe et à l'une des courbes sécantes sont équivalents entre eux.

Étudions, en particulier, les groupes de points déterminés sur une courbe du champ hyperelliptique sans point singulier, $\Theta_0(u, v) = 0$, par les courbes ayant pour équation générale

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\rho_1\Theta'_1(u-\lambda', v-\mu') \\ &\quad + \rho_2\Theta'_2(u-\lambda', v-\mu') + \ldots + \rho_{n^2}\Theta'_{n^2}(u-\lambda', v-\mu') = 0, \end{aligned}\right.$$

où $\Theta'_1(u, v), \ldots, \Theta'_{n^2}(u, v)$ désignent les n^2 fonctions thêta d'ordre n et de caractéristique nulle, à l'aide desquelles on peut exprimer linéairement toutes les fonctions de même nature. Nous supposerons que n est *inférieur* à l'ordre, m, de $\Theta_0(u, v)$, c'est-à-dire que les courbes sécantes sont d'ordre inférieur à celui de la courbe fixe.

Il est aisé de démontrer que les courbes représentées par l'équation (5), où λ', μ' sont supposés fixes, et $\rho_1, \rho_2, \ldots$, variables d'une courbe à l'autre, découpent sur la proposée des groupes appartenant à un *système spécial :* soient en effet

$$\Theta''_1(u, v), \quad \Theta''_2(u, v), \quad \ldots, \quad \Theta''_{(m-n)^2}(u, v),$$

$(m-n)^2$ fonctions thêta, linéairement distinctes d'ordre $m-n$ et de caractéristique nulle; désignons par λ'', μ'' deux constantes, liées à λ' et μ' par les relations

$$(6)\qquad \left.\begin{aligned} n\lambda' + (m-n)\lambda'' &\equiv 0 \\ n\mu' + (m-n)\mu'' &\equiv 0 \end{aligned}\right\} \text{(mod périodes)}.$$

La courbe qui a pour équation

$$\begin{aligned} 0 = \;& [\rho_1\Theta'_1(u-\lambda', v-\mu') + \rho_2\Theta'_2(u-\lambda', v-\mu') + \ldots] \\ & \times [\sigma_1\Theta''_1(u-\lambda'', v-\mu'') + \sigma_2\Theta''_2(u-\lambda'', v-\mu'') + \ldots], \end{aligned}$$

où $\rho_1, \rho_2, \ldots, \sigma_1, \sigma_2, \ldots$ sont des constantes quelconques, est, d'après les remarques des n^{os} **111** et **112**, une courbe du même ordre et de la même famille que la courbe $\Theta_0(u, v) = 0$; elle détermine donc (n° **114**) sur cette dernière, quand on fait varier $\rho_1, \rho_2, \ldots, \sigma_1, \sigma_2, \ldots$ des groupes $\mathcal{G}_{2(p-1)}$. Or chacune des deux familles de courbes

$$(5) \qquad \rho_1\Theta'_1(u-\lambda', v-\mu') + \rho_2\Theta'_2(u-\lambda', v-\mu') + \ldots = 0,$$

$$(5\,bis) \qquad \sigma_1\Theta''_1(u-\lambda'', v-\mu'') + \sigma_2\Theta''_2(u-\lambda'', v-\mu'') + \ldots = 0$$

découpe sur la courbe de genre p, $\Theta_0(u, v) = 0$, des groupes équivalents qui appartiennent respectivement à deux systèmes de groupes, Σ' et Σ''; les groupes de l'un des deux systèmes contiennent moins de p points, puisque l'ensemble d'un groupe de Σ' et d'un groupe de Σ'' comprend $2(p-1)$ points. On en conclut (n° **85**) que l'un des deux systèmes est spécial, et l'autre l'est également, en vertu du théorème de Riemann-Roch. Donc :

Dans le champ hyperelliptique, les courbes d'un même ordre et d'une même famille découpent, sur une courbe quelconque du champ sans point singulier et d'ordre supérieur à l'ordre des courbes sécantes, des groupes de points qui appartiennent à un système spécial.

La démonstration de ce théorème nous fait de plus connaître une seconde famille de courbes d'un même ordre, découpant sur la courbe fixe des groupes qui appartiennent au système spécial complémentaire du précédent.

117. Ces résultats auxquels nous sommes parvenu si simplement vont nous conduire à des propriétés géométriques intéressantes des courbes du champ hyperelliptique, propriétés qui n'appartiennent pas aux courbes algébriques générales.

Supposons d'abord que la courbe $\Theta_0(u, v) = 0$ soit *d'ordre pair*, c'est-à-dire que l'ordre, m, de $\Theta_0(u, v)$ soit égal à $2q$: nous pourrons allors choisir n de façon que les courbes (5) et (5 *bis*) soient du même ordre; il suffit pour cela de faire $n = q$. Si de plus on choisit λ' et μ'

de façon que l'on ait $\lambda' = \lambda''$, $\mu' = \mu''$, ce qui entraîne, d'après

$$(6) \qquad 2q\lambda' \equiv 0, \qquad 2q\mu' \equiv 0 \qquad \text{(mod périodes)},$$

les deux familles de courbes (5) et (5 *bis*) seront identiques. A chaque système de valeurs de λ', μ' vérifiant les congruences précédentes correspond ainsi une famille de courbes représentée par l'équation (5); cherchons combien nous obtiendrons, par cette méthode, de familles différentes.

Soient $\mathfrak{P}_0$, $\mathfrak{P}'_0$ et $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$ deux couples de périodes simultanées; nous aurons pour λ', μ' les solutions

$$\frac{\mathfrak{P}_0}{2q}, \quad \frac{\mathfrak{P}'_0}{2q} \quad \text{et} \quad \frac{\mathfrak{P}}{2q}, \quad \frac{\mathfrak{P}'}{2q};$$

pour que les courbes représentées par l'équation (5), où l'on remplace successivement λ' et μ' par ces valeurs, appartiennent à deux familles distinctes, il faut, d'après ce qui a été dit au n° **111**, et puisque les fonctions Θ' sont d'ordre q, que les quantités

$$q\left(\frac{\mathfrak{P}_0}{2q} - \frac{\mathfrak{P}}{2q}\right), \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{\mathfrak{P}_0}{2} - \frac{\mathfrak{P}}{2},$$

et

$$q\left(\frac{\mathfrak{P}'_0}{2q} - \frac{\mathfrak{P}'}{2q}\right), \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{\mathfrak{P}'_0}{2} - \frac{\mathfrak{P}'}{2},$$

ne soient pas égales à des périodes simultanées, et, par suite, que les couples de demi-périodes $\frac{\mathfrak{P}_0}{2}$, $\frac{\mathfrak{P}'_0}{2}$ et $\frac{\mathfrak{P}}{2}$, $\frac{\mathfrak{P}'}{2}$ soient différents, à des périodes près. Il en résulte qu'il y aura autant de familles différentes de courbes (5) répondant au problème qu'il y a de couples distincts de demi-périodes, c'est-à-dire *seize*.

Deux courbes quelconques d'une de ces seize familles découpent sur la courbe $\Theta_0(u, v) = 0$ deux groupes de points dont l'ensemble forme un groupe $\mathcal{G}_{2(p-1)}$; en particulier, si les deux courbes considérées coïncident, on obtient, sur la courbe $\Theta_0(u, v) = 0$, un groupe particulier $\mathcal{G}_{2(p-1)}$, formé de points deux à deux confondus. L'équa-

tion (5) renfermant $n^2 - 1$, ici $q^2 - 1$, paramètres, il y aura un nombre $q^2 - 1$ fois infini de ces groupes particuliers.

Or il est à remarquer que, sur une courbe algébrique quelconque, il n'existe qu'un nombre fini de tels groupes $\mathcal{G}_{2(p-1)}$: on sait en effet que, parmi les courbes d'ordre $N - 3$ adjointes à une courbe plane d'ordre N et de genre p, le nombre de celles qui touchent la courbe plane en tous leurs points non singuliers de rencontre avec elle, est égal, en général, à $2^{p-1}(2^p - 1)$; c'est seulement pour des courbes particulières que ce nombre pourra devenir infini. Nous avons ainsi trouvé, pour les courbes du champ hyperelliptique, une propriété géométrique qu'on peut énoncer ainsi :

Soit C_0 *une courbe du champ hyperelliptique, sans point singulier, obtenue en égalant à zéro une fonction thêta d'ordre pair,* $2q$ [1]; *désignons par* C'_0 *sa projection sur un plan quelconque, et, plus généralement, une courbe plane qui lui corresponde point par point; soit* N *le degré de* C'_0 : *il existe seize familles de courbes d'ordre* $N - 3$, *adjointes à* C'_0, *et touchant cette courbe en tous leurs points mobiles de rencontre avec elle; l'équation des courbes d'une même famille dépend de* $q^2 - 1$ *paramètres arbitraires.*

Les points de contact des courbes d'une famille forment des groupes équivalents de $4q^2$ *points qui appartiennent à un système spécial, et par les points de deux de ces groupes on peut faire passer une courbe adjointe d'ordre* $N - 3$.

Par un raisonnement tout à fait semblable à celui qui précède, on établit la proposition plus générale suivante :

Si l'équation de la courbe C_0 *du champ hyperelliptique s'obtient en égalant à zéro une fonction thêta d'ordre* rq, *il existe* r^4 *familles de courbes d'ordre* $N - 3$ *adjointes à* C'_0 *et ayant avec cette dernière courbe un contact d'ordre* $r - 1$ *en chacun de leurs points*

---

[1] Le genre de C_0 est (n° 114) égal à $4q^2 + 1$; réciproquement une courbe du champ hyperelliptique, sans point singulier, de genre $4q^2 + 1$, s'obtient en égalant à zéro une fonction thêta d'ordre $2q$.

mobiles de rencontre avec elle; l'équation des courbes d'une même famille dépend de $q^2 - 1$ paramètres arbitraires.

Les points de contact des courbes d'une famille forment des groupes équivalents de $2rq^2$ points qui appartiennent à un système spécial, et par les points de r de ces groupes on peut faire passer une courbe adjointe d'ordre $N - 3$.

En particulier, et cette proposition s'applique à toutes les courbes sans point singulier du champ hyperelliptique : *si l'équation de C_0 s'obtient en annulant une fonction thêta d'ordre m, c'est-à-dire si C_0 est de genre $m^2 + 1$, il existe m^4 courbes d'ordre* $N - 3$, *adjointes à C_0, et ayant avec cette dernière courbe un contact d'ordre $m - 1$ en chacun de leurs points (non multiples) de rencontre avec elle.*

Les $2m$ points de contact d'une de ces courbes avec C_0' correspondent aux points déterminés sur la courbe C_0, c'est-à-dire $\Theta_0(u, v) = 0$, par les courbes

$$\vartheta_0(u - \lambda', v - \mu') = 0,$$

où λ' et μ' sont définis par les congruences

$$m\lambda' \equiv 0, \qquad n\mu' \equiv 0 \qquad \text{(mod périodes)},$$

et où $\vartheta_0(u, v)$ désigne toujours la fonction thêta d'ordre un, de caractéristique nulle.

Cette dernière propriété n'appartient pas non plus aux courbes algébriques générales, car soit $p = m^2 + 1$ le genre d'une de ces courbes, supposée plane et d'ordre N : pour trouver une courbe adjointe d'ordre $N - 3$ ayant avec elle en $2m$ points un contact d'ordre $m - 1$, il faut satisfaire à $2m(m - 1)$ conditions; or $2m(m - 1)$ est supérieur au nombre de paramètres, $p - 1$ ou m^2, dont dépend l'équation des courbes adjointes d'ordre $N - 3$, dès que m dépasse 2.

118. *Remarque.* — Les théorèmes ci-dessus s'étendent d'eux-mêmes aux courbes univoques tracées sur la surface de Kummer, lorsque ces courbes n'ont pas d'autres points multiples que les points

doubles qui leur appartiennent nécessairement en vertu de leur définition.

On peut en ce cas donner à nos résultats une forme géométrique simple.

Soit en effet $\Theta_0(u-\lambda, v-\mu)=0$ l'équation d'une courbe univoque de la surface de Kummer; si $\Theta_0(u, v)$ est d'ordre m, cette courbe, d'ordre $4m$, est l'intersection de la surface de Kummer avec une surface d'ordre m, touchant la précédente en m^2 points (n° **91**); par suite les groupes $\mathcal{G}_{2(p-1)}$ et les groupes spéciaux sont découpés (n° **80**) sur elle par des surfaces d'ordre m passant par les m^2 points doubles.

Cette remarque permet, par exemple, d'énoncer ainsi le dernier théorème du numéro précédent :

Par les m^2 points doubles d'une courbe univoque d'ordre $4m$ tracée sur la surface de Kummer, on peut faire passer m^4 surfaces d'ordre m, ayant avec la courbe proposée un contact d'ordre $m-1$ en chacun de leurs $2m$ points (non multiples) de rencontre avec elle.

Les $2m$ points de contact d'une de ces surfaces et de la courbe sont dans un même plan tangent de la surface de Kummer.

Lorsque m dépasse 4, on doit entendre qu'il y a m^4 *systèmes* de surfaces d'ordre m répondant à la question, les surfaces d'un même système coupant la surface de Kummer suivant la même courbe; mais il n'y a jamais que m^4 groupes de points de contact.

119. Arrivons maintenant aux courbes du champ hyperelliptique douées de points singuliers, c'est-à-dire aux courbes représentées par une équation $\Theta_0(u, v)=0$, telle que les trois équations $\Theta_0(u, v)=0$, $\frac{\partial\Theta_0}{\partial u}=0$, $\frac{\partial\Theta_0}{\partial v}=0$ aient un ou plusieurs systèmes de solutions communes en u et v.

Soit u_0, v_0 un quelconque de ces systèmes; il est clair qu'on obtiendra une intégrale de première espèce, appartenant à la courbe

$\Theta_0 = 0$, par l'expression

$$(4) \qquad \int \frac{\Theta(u, v)}{\left(\frac{\partial \Theta_0}{\partial v}\right)} du$$

où $\Theta(u, v)$ désigne une fonction de même ordre et de même famille que $\Theta_0(u, v)$, telle que l'intégrale précédente reste finie en tout point singulier u_0, v_0. Si u_0, v_0 est un point double, c'est-à-dire si les dérivées secondes de $\Theta_0(u, v)$ ne s'y annulent pas, il faut et il suffit, pour que l'intégrale (4) reste finie, que la courbe $\Theta(u, v) = 0$ passe par ce point; si u_0, v_0 est un point multiple d'ordre k, c'est-à-dire si toutes les dérivées de $\Theta_0(u, v)$ par rapport à u et v s'annulent en ce point jusqu'à l'ordre k, exclusivement, la courbe $\Theta(u, v) = 0$ devra avoir au même point un point multiple d'ordre $k - 1$. On le démontre par un raisonnement identique à celui que l'on connaît pour les points singuliers des courbes algébriques planes : sur une courbe plane, $f(x, y) = 0$, les propriétés d'un point multiple x_0, y_0 dépendent en effet uniquement d'un certain nombre des premiers termes du développement de $f(x, y)$ suivant les puissances croissantes de $x - x_0$, $y - y_0$, et ces propriétés s'étendent d'elles-mêmes aux points singuliers d'une courbe $\Theta_0(u, v) = 0$ du champ hyperelliptique, puisque $\Theta_0(u, v)$ est toujours développable en série convergente suivant les puissances croissantes de $u - u_0$, $v - v_0$.

D'après cela, et d'une manière générale, si la courbe $\Theta_0(u, v) = 0$ a, en un point u_0, v_0, une singularité σ_0, il faudra, pour que l'intégrale (4) reste finie en ce point, que la courbe $\Theta = 0$ possède en u_0, v_0 une singularité bien déterminée σ'_0 : nous dirons que la singularité σ'_0 est *adjointe* de σ_0.

Si l'on considère, dans le développement de $\Theta_0(u, v)$, suivant les puissances croissantes de $u - u_0$, $v - v_0$, les termes (dont les coefficients peuvent être nuls) qui caractérisent la singularité σ_0, il est clair qu'une courbe algébrique plane $f(u, v) = 0$, telle que le développement de $f(u, v)$ commence par les mêmes termes, les autres termes étant quelconques, aura, au point u_0, v_0, la singularité σ_0, et les courbes adjointes à $f(u, v) = 0$ auront, en ce même point, la singu-

larité adjointe σ'_0. On ramène ainsi la recherche de la singularité σ'_0 au problème analogue pour une courbe algébrique plane.

Une courbe possédant, en chaque singularité de la courbe $\Theta_0(u, v) = 0$, la singularité adjointe sera dite *adjointe* à la proposée.

Cela posé, nous allons établir que les intégrales abéliennes de première espèce relatives à une courbe quelconque $\Theta_0(u, v) = 0$ du champ hyperelliptique sont, à part $\int du$ et $\int dv$, de la forme

$$\int \frac{\Theta(u, v)}{\left(\frac{\partial \Theta_0}{\partial v}\right)} du,$$

où $\Theta(u, v) = 0$ est une courbe du même ordre et de la même famille que $\Theta_0(u, v) = 0$, et adjointe à celle-ci.

120. Observons d'abord que, si deux courbes ont en un même point deux singularités, σ_1, σ_2, elles ont, en ce point, un certain nombre d'intersections confondues : ce nombre ne dépend évidemment que des termes qui caractérisent les singularités σ_1 et σ_2 dans les développements des premiers membres des équations des deux courbes; il est égal au nombre analogue relatif à deux courbes planes qui auraient en un point les singularités σ_1 et σ_2; nous le désignerons par $I(\sigma_1, \sigma_2)$.

En particulier, le nombre $I(\sigma_0, \sigma'_0)$ des intersections, réunies en un point singulier, d'une courbe et d'une quelconque de ses courbes adjointes ne dépend que de la singularité σ_0; il jouit de plusieurs propriétés importantes que nous allons exposer.

Tout d'abord, dans le champ hyperelliptique comme dans le plan, le nombre $I(\sigma_0, \sigma'_0)$ est double du nombre qui exprime l'abaissement du genre dû à la singularité σ_0.

Soit en effet $\Theta_0(u, v)$ une fonction thêta d'ordre m, supposons que la courbe $\Theta_0 = 0$ n'ait qu'une seule singularité, σ_0, et désignons par $\Theta(u, v) = 0$ la courbe adjointe la plus générale, du même ordre et de la même famille que la proposée. La différentielle

$$\frac{\Theta(u, v)}{\left(\frac{\partial \Theta_0}{\partial v}\right)} du$$

étant, par hypothèse, abélienne et de première espèce le long de la courbe $\Theta_0 = 0$, s'annulera en $2(p-1)$ points, non fixes, de cette courbe, p désignant le genre de $\Theta_0 = 0$. En d'autres termes, le nombre des points, distincts du point singulier, où les deux courbes $\Theta_0 = 0$ et $\Theta = 0$ se rencontrent, est égal à $2(p-1)$, et l'on a

$$2(p-1) = 2m^2 - \mathrm{I}(\sigma_0, \sigma'_0);$$

d'où

$$p = m^2 + 1 - \tfrac{1}{2}\mathrm{I}(\sigma_0, \sigma'_0) \tag{7}$$

ce qui démontre la proposition à établir.

En second lieu, le nombre $\frac{1}{2}\mathrm{I}(\sigma_0, \sigma'_0)$ est égal au nombre des conditions auxquelles équivaut la singularité σ'_0. Ce théorème est évident dans le plan : soit en effet c'_0 le nombre de conditions dont il s'agit; pour une courbe plane d'ordre n sans points singuliers, les courbes adjointes d'ordre $n-3$, linéairement distinctes, sont en nombre égal à $\frac{(n-2)(n-1)}{2}$, puisque toute courbe d'ordre $n-3$ est adjointe à la proposée. Si la courbe a une singularité σ_0, le nombre des courbes adjointes d'ordre $n-3$ est diminué de c'_0 par définition, et par suite c'_0 est égal à l'abaissement du genre dû à la singularité σ_0, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}\mathrm{I}(\sigma_0, \sigma'_0)$.

La proposition subsiste dans le champ hyperelliptique, puisque les nombres $\mathrm{I}(\sigma_0, \sigma'_0)$ et c'_0 ne dépendent que de la nature de la singularité σ_0; il en résulte que, dans le développement suivant les puissances croissantes de $u - u_0$, $v - v_0$, du premier nombre de l'équation d'une courbe supposée adjointe à une autre courbe, douée en u_0, v_0 de la singularité σ_0, les coefficients doivent satisfaire à $\frac{1}{2}\mathrm{I}(\sigma_0, \sigma'_0)$ équations, et ces équations sont linéaires comme dans le cas du plan. Toutefois on pourrait objecter qu'en raison de la nature spéciale des fonctions thêta, un certain nombre des équations précédentes peuvent être des conséquences nécessaires des autres; le nombre c'_0 des conditions cherchées serait donc inférieur à $\frac{1}{2}\mathrm{I}(\sigma_0, \sigma'_0)$.

Nous allons montrer que cette hypothèse est à écarter.

Supposons toujours que la courbe $\Theta_0(u, v) = 0$ n'ait pas d'autre

singularité que σ_0; le nombre des courbes adjointes linéairement distinctes du même ordre et de la même famille est égal à $m^2 - c'_0$, et si l'on retranche la courbe $\Theta_0 = 0$ elle-même, il reste $m^2 - c'_0 - 1$ de ces courbes, fournissant par la formule (4) autant d'intégrales abéliennes de première espèce, sur $\Theta_0 = 0$. Si l'on ajoute les intégrales $\int du$ et $\int dv$, on voit que le genre, p, de la courbe $\Theta_0 = 0$ est au moins égal à $m^2 - c'_0 + 1$,

$$p \geqq m^2 - c'_0 + 1.$$

Or on a

$$(7) \qquad p = m^2 + 1 - \tfrac{1}{2}\mathrm{I}(\sigma_0, \sigma'_0);$$

d'où l'on tire

$$c'_0 \geqq \tfrac{1}{2}\mathrm{I}(\sigma_0, \sigma'_0)$$

et par suite, comme c'_0 ne peut dépasser $\frac{1}{2}\mathrm{I}(\sigma_0, \sigma'_0)$, d'après ce qui a été dit plus haut, on a nécessairement

$$c'_0 = \tfrac{1}{2}\mathrm{I}(\sigma_0, \sigma'_0).$$

Donc :

Pour une courbe du champ hyperelliptique possédant en un point une singularité σ_0, le nombre $\frac{1}{2}\mathrm{I}(\sigma_0, \sigma'_0)$ est égal : 1° au nombre des conditions linéaires auxquelles équivaut la singularité adjointe σ'_0; 2° au nombre qui exprime l'abaissement du genre dû à la singularité σ_0.

121. Nous sommes maintenant en mesure d'établir la proposition que nous avions en vue relativement aux intégrales abéliennes de première espèce qui appartiennent à une courbe du champ hyperelliptique.

Soit $\Theta_0 = 0$ cette courbe; supposons qu'elle ait en des points $u_1, v_1, u_2, v_2, \ldots$ des singularités $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$, soit p son genre, désignons par m l'ordre de $\Theta_0(u, v)$.

On a, d'après le raisonnement du numéro précédent,

$$2(p-1) = 2m^2 - \Sigma I(\sigma, \sigma')$$

ou

$$(8) \qquad p = m^2 + 1 - \tfrac{1}{2}\Sigma I(\sigma, \sigma'),$$

la somme s'étendant à toutes les singularités $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$.

D'un autre côté, les courbes du même ordre et de la même famille que $\Theta_0 = 0$, adjointes à celle-ci et linéairement distinctes, sont en nombre *au moins* égal à

$$m^2 - \tfrac{1}{2}\Sigma I(\sigma, \sigma'),$$

puisque chaque singularité σ', adjointe d'une singularité σ, équivaut à $\frac{1}{2}I(\sigma, \sigma')$ conditions. Nous disons *au moins* parce que les conditions imposées par les diverses singularités σ' pourraient ne pas être indépendantes. En retranchant des courbes adjointes qui précèdent la courbe $\Theta_0 = 0$ elle-même, il reste au moins $m^2 - 1 - \frac{1}{2}\Sigma I(\sigma, \sigma')$ courbes distinctes, donnant par la formule (4) *au moins* autant d'intégrales de première espèce le long de la courbe $\Theta_0 = 0$; en ajoutant maintenant les deux intégrales $\int du$ et $\int dv$, on arrive à l'inégalité

$$p \geqq m^2 + 1 - \tfrac{1}{2}\Sigma I(\sigma, \sigma')$$

et, en comparant à la relation (8), on voit qu'on doit prendre le signe $=$, et par suite la restriction *au moins* doit être supprimée.

Il en résulte :

1° *Que les conditions imposées aux courbes du même ordre et de la même famille qu'une courbe donnée, par les singularités adjointes des singularités de cette courbe, sont indépendantes les unes des autres;*

2° *Que toutes les intégrales de première espèce appartenant à*

une courbe du champ hyperelliptique sont, à part $\int du$ *et* $\int dv$, *comprises dans le type* (4) (¹).

Nous voyons ainsi qu'une courbe de genre p admet $p-1$ courbes adjointes, linéairement distinctes, du même ordre et de la même famille qu'elle, parmi lesquelles figure d'ailleurs cette courbe même.

122. M. Guccia a démontré, pour les courbes algébriques planes, le théorème suivant, qui s'étend aussi, en vertu des explications que nous venons de donner, aux courbes du champ hyperelliptique (²).

« *Le nombre des conditions auxquelles équivaut pour une courbe une singularité donnée en un point donné est égal au nombre des intersections, réunies en ce point, de deux courbes quelconques douées de cette singularité, diminué du nombre qui exprime l'abaissement du genre que celle-ci produit* (³). »

Nous aurons occasion d'appliquer cette belle et importante proposition, ainsi que la suivante, due au même auteur et que nous énonçons tout de suite pour le champ hyperelliptique.

Soit un système linéaire de courbes, du même ordre et de la même famille,

$$0 = \lambda_1 \Theta_1^{(1)}(u, v) + \lambda_2 \Theta_2^{(1)}(u, v) + \ldots + \lambda_\alpha \Theta_\alpha^{(1)}(u, v) + \ldots$$

tel que la courbe mobile du système possède en un point une singu-

(¹) Cette seconde conséquence était évidente *a priori;* la proposition a été en effet démontrée pour les courbes sans point singulier, et il est clair qu'elle subsiste quand on fait varier les coefficients de l'équation d'une courbe sans point singulier de manière à lui faire acquérir un ou plusieurs de ces points.

(²) *Comptes rendus,* 4 octobre 1886.

(³) On suppose dans cet énoncé que si les deux courbes $\Theta_0 = 0$, $\Theta = 0$ ont en un point la singularité considérée, les courbes du système $\lambda_0 \Theta_0 + \lambda_1 \Theta_1 = 0$ ont en ce point la même singularité.

larité σ_1; soient de même d'autres systèmes linéaires

$$0 = \Sigma_\beta \mu_\beta \Theta_\beta^{(2)}(u, v) = 0;$$
$$0 = \Sigma_\gamma \nu_\gamma \Theta_\gamma^{(3)}(u, v),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$0 = \Sigma_\delta \sigma_\delta \Theta_\delta^{(\rho)}(u, v),$$

dont les courbes mobiles possèdent un même point des singularités respectives $\sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_\rho$.

On appellera *singularité composée* $(\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_\rho)$ la singularité bien déterminée que possède au point considéré, quelles que soient les constantes a, toute courbe représentée par l'équation

$$0 = \Sigma a_{\alpha,\beta,\dots,\delta} \Theta_\alpha^{(1)} \Theta_\beta^{(2)} \dots \Theta_\delta^{(\rho)},$$

la somme s'étendant à toutes les valeurs de $\alpha, \beta, \dots, \delta$.

Cela posé, on a ce théorème [1] :

« *Le nombre de conditions auxquelles équivaut la singularité* $(\sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_\rho)$ *en un point donné est égal à la somme des nombres analogues relatifs aux singularités* $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_\rho$, *augmenté de la somme des intersections deux à deux des mêmes singularités, c'est-à-dire de la somme des nombres* $I(\sigma_i, \sigma_j)$, $[i \gtrless j]$.

Il est à remarquer que M. Guccia n'a pas établi les théorèmes qui précèdent en partant des développements dans le domaine du point singulier; mais les résultats sont applicables aux courbes du champ hyperelliptique puisqu'ils ne dépendent en réalité que des termes caractéristiques de ces développements. D'ailleurs M. Nöther a indiqué une méthode pour déduire les propositions de M. Guccia de l'équation même des courbes au voisinage des points multiples [2].

Il est aisé de voir, à l'aide des principes qui viennent d'être posés relativement aux courbes adjointes, dans quelle mesure les proposi-

---

(1) *Rendiconti del Circolo matem. di Palermo*, t. III, p. 241.

(2) *Ibid.*, t. IV, p. 300.

tions établies plus haut pour les courbes du champ hyperelliptique sans point singulier s'appliquent aux courbes possédant des singularités; nous n'insisterons pas sur ces extensions qui n'offrent aucune difficulté dans chaque cas particulier, et que nous présenterons d'ailleurs sous une autre forme en exposant les propriétés des surfaces adjointes aux surfaces hyperelliptiques générales.

CHAPITRE III.

Théorie des surfaces adjointes.

123. Reprenons la surface hyperelliptique $\mathfrak{S}$ dont les coordonnées d'un point x_1, x_2, x_3, x_4 sont proportionnelles à quatre fonctions thèta d'ordre h et de caractéristique nulle $x_1(u, v)$, $x_2(u, v)$, $x_3(u, v)$, $x_4(u, v)$. Nous supposerons que, dans le champ hyperelliptique, c'est-à-dire sur une surface hyperelliptique choisie à volonté, les quatre courbes $x_j(u, v) = 0$, ou, d'une manière plus précise, les courbes

$$(1) \quad 0 = \lambda_1 x_1(u, v) + \lambda_2 x_2(u, v) + \lambda_3 x_3(u, v) + \lambda_4 x_4(u, v),$$

où les λ sont des constantes quelconques, ont un certain nombre de singularités communes $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_\rho$ aux points $u_1, v_1; u_2, v_2; \ldots, u_\rho, v_\rho$.

Dans cette hypothèse tout à fait générale, nous allons établir, entre les surfaces *adjointes* de $\mathfrak{S}$ et les fonctions thèta, une liaison importante qui est la généralisation de notre théorème fondamental pour la surface de Kummer et qui se prêtera à de nombreuses applications géométriques.

La surface $\mathfrak{S}$ définie plus haut étant toujours supposée représentable point par point sur le champ hyperelliptique, on obtiendra son degré n, en cherchant le nombre des solutions non fixes communes aux deux équations

$$(1) \qquad \lambda_1 x_1(u, v) + \ldots + \lambda_4 x_4(u, v) = 0,$$

$$(2) \qquad \mu_1 x_1(u, v) + \ldots + \mu_4 x_4(u, v) = 0,$$

où les λ et les μ sont des constantes quelconques. Ce nombre est égal à $2h^2$ diminué de la somme des intersections des deux courbes (1) et (2) réunies aux points singuliers u_1, v_1; $u_2, v_2, \ldots, u_\rho, v_\rho$; c'est-à-dire, d'après la notation du n° **120**, de la somme des nombres $I(\sigma_k, \sigma_k)$.

Donc :

$$n = 2h^2 - \Sigma_k I(\sigma_k, \sigma_k), \qquad (k = 1, 2, \ldots \rho).$$

Si le point u_k, v_k est un point multiple d'ordre k à branches séparées pour les courbes (1) et si en ce point ces courbes n'ont aucune branche commune, $I(\sigma_k, \sigma_k)$ est égal à k^2.

Le genre, p, des sections planes de $\mathfrak{S}$, c'est-à-dire des courbes (1), est donné par la formule du n° **121** :

$$p = h^2 + 1 - \tfrac{1}{2}\Sigma_k I(\sigma_k, \sigma'_k),$$

σ'_k désignant toujours la singularité adjointe de σ_k.

Dans le cas où u_k, v_k est un point multiple d'ordre k de la nature indiquée tout à l'heure, $\frac{1}{2} I(\sigma_k, \sigma'_k)$ est égal à $\frac{k(k-1)}{2}$.

124. Arrivons maintenant à l'étude des surfaces adjointes à $\mathfrak{S}$ et d'ordre $n - 3$; soit posé

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4,$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_4$ étant des constantes. La surface $F = 0$ est un plan, qui détermine sur la surface $\mathfrak{S}$ une section s.

La fonction de u et v

$$F(u, v) = F[x_1(u, v), \ldots, x_4(u, v)] = \lambda_1 x_1(u, v) + \ldots + \lambda_4 x_4(u, v)$$

est une fonction thêta, d'ordre h, ayant en chaque point singulier u_k, v_k la singularité σ_k: désignons par $\Theta_1(u, v), \ldots, \Theta_{p-1}(u, v)$ les premiers membres des $p - 1$ courbes, linéairement distinctes, du même ordre et de la même famille que s, et adjointes à cette courbe (remarque finale du n° **121**), parmi lesquelles figure d'ailleurs la courbe $F(u, v) = 0$ elle-même; les intégrales abéliennes de première espèce

appartenant à la courbe considérée seront, à part $\int du$ et $\int dv$; de la forme

$$(4) \qquad \mathfrak{J} = \int \frac{\Theta(u, v)}{\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)} du,$$

où $\Theta(u, v)$ est l'une quelconque des fonctions $\Theta_1, \ldots, \Theta_{p-1}$.

L'intégrale $\mathfrak{J}$ peut être mise sous une autre forme qui conduit à des conséquences importantes, relativement aux surfaces adjointes. Représentons en effet comme d'habitude par x, y, z les rapports $\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}$, on a (n° **104**) sur $\mathfrak{S}$

$$(5) \qquad \begin{cases} S'_z\, du = B\, dx - A\, dy, \\ S'_z\, dv = B_1\, dx - A_1\, dy, \end{cases}$$

$$(5\,bis) \qquad D\, S'_z = B A_1 - A B_1,$$

$S = 0$ étant toujours l'équation de $\mathfrak{S}$ et $D = 0$ celle de la surface adjointe d'ordre $n - 4$.

Or, le long de la courbe $F = 0$, $S = 0$, on a

$$dx\, F'_x + dy\, F'_y + dz\, F'_z = 0,$$
$$dx\, S'_x + dy\, S'_y + dz\, S'_z = 0;$$

d'où

$$\frac{dx}{S'_y F'_z - S'_z F'_y} = \frac{dy}{S'_z F'_x - S'_x F'_z} = \frac{dz}{S'_x F'_y - S'_y F'_x}$$

étant posé, bien entendu,

$$F(x, y, z) = \lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z + \lambda_4.$$

De ces relations et des relations (5), on tire, le long de la courbe s,

$$(6) \qquad \frac{dx}{S'_y F'_z - S'_z F'_y} = \frac{S'_z\, du}{B(S'_y F'_z - S'_z F'_y) - A(S'_z F'_x - S'_x F'_z)},$$

ce qui donne la valeur de du, en fonction de dx.

Reste à calculer, pour transformer l'intégrale (4), la valeur de $\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)$, en fonction de x, y, z; or on a

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4 F(x, y, z);$$

d'où, le long de la courbe $S = 0$, $F = 0$,

$$(6\ bis) \qquad \frac{\partial F}{\partial v} = x_4\left(\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial v}\right).$$

Les relations (5), résolues par rapport à dx et dy, donnent, en tenant compte de (5 *bis*),

$$D\,dx = A_1\,du - A\,dv,$$
$$D\,dy = B_1\,du - B\,dv;$$

d'où

$$\frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{A}{D}, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = -\frac{B}{D},$$

et, par suite,

$$\frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{S'_x}{S'_z}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{S'_y}{S'_z}\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{A S'_x + B S'_y}{S'_z}.$$

Portant ces valeurs de $\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}$ dans (6 *bis*), il vient

$$(6\ ter) \quad \frac{\partial F}{\partial v} = x_4[B(S'_y F'_z - S'_z F'_y) - A(S'_z F'_x - S'_x F'_z)]\frac{1}{D S'_z};$$

d'où, finalement, en remplaçant dans (4) du et $\frac{\partial F}{\partial v}$ par leurs valeurs tirées de (6) et (6 *ter*),

$$\mathfrak{J} = \int \frac{\Theta(u, v)\, D(x, y, z)}{x_4}\,\frac{dx}{S'_y F'_z - S'_z F'_y}.$$

Supposons que le plan $F = 0$ soit le plan $z = z_0$, qui est évidemment un plan arbitraire de l'espace; il restera

$$\mathfrak{J} = \int \frac{\Theta(u, v)\, D(x, y, z_0)}{x_4(u, v)}\,\frac{dx}{S'_y}.$$

Puisque cette intégrale reste finie en tous les points de la courbe plane d'ordre n, $S(x, y, z_0) = 0$, il est nécessaire que la fonction

$$\frac{\Theta(u, v)}{x_4(u, v)} D(x, y, z_0)$$

soit égale, le long de cette courbe, à un polynôme entier d'ordre $n - 3$ en x et y, $C(x, y)$, dont les coefficients sont d'ailleurs fonctions de z_0. De plus, la courbe $C = 0$ sera adjointe à la courbe

$$S(x, y, z_0) = 0.$$

En d'autres termes, la fonction $\frac{\Theta(u, v)}{x_4(u, v)} D(x, y, z)$, qui est, en chaque point de la surface $\mathfrak{S}$ une fonction quadruplement périodique de u, v, et par suite une fonction rationnelle de x, y, z, doit être une fonction entière de x et de y : on verrait de même qu'elle est une fonction entière de x et de z, et par suite de x, y, z. On a ainsi, en chaque point de $\mathfrak{S}$,

$$(7) \qquad \frac{\Theta(u, v)}{x_4(u, v)} = \frac{C(x, y, z)}{D(x, y, z)},$$

C désignant un polynôme entier. D'après ce qui précède, le degré de C est $n - 3$ par rapport à deux quelconques des variables x, y, z : le tétraèdre de référence étant arbitraire, il en résulte nécessairement que C est d'ordre $n - 3$, par rapport à l'ensemble des trois variables.

De plus, la courbe commune à la surface $C = 0$ et au plan $z = z_0$, qui est un plan arbitraire de l'espace, étant, comme on l'a vu, adjointe à la section de $\mathfrak{S}$ par le même plan, cette surface $C = 0$ aura pour courbe multiple d'ordre $l - 1$ toute courbe multiple d'ordre l de $\mathfrak{S}$.

La relation (7), qui peut s'écrire, en revenant aux coordonnées homogènes,

$$(8) \qquad \Theta(u, v) = \frac{C(x_1, x_2, x_3, x_4)}{D(x_1, x_2, x_3, x_4)},$$

mettait d'ailleurs ce dernier résultat en évidence, car le premier

membre restant fini pour toutes les valeurs de u et de v, il faut, pour que le second membre soit également fini, que la surface $C = 0$ passe par les courbes communes aux surfaces $D = 0$ et $S = 0$, les courbes unicursales singulières pouvant toutefois être exceptées, puisque le long des courbes $x_1, \ldots, x_4$ s'annulent. On en déduit que toute courbe multiple d'ordre l de $\mathfrak{S}$, qui est multiple d'ordre $l - 1$ sur la surface adjointe $\mathfrak{D}$, doit être aussi multiple d'ordre $l - 1$ sur $C = 0$. Si cette courbe multiple était *en même temps* une courbe unicursale singulière, le raisonnement précédent ne s'appliquerait plus, mais nous venons de voir, par une autre voie, que la proposition subsiste encore.

125. La relation (8) montre également comment se comporte la surface $C = 0$ aux points multiples (isolés) de la surface $\mathfrak{S}$.

M. Picard a fait voir que la surface $D = 0$ passe par les points doubles de $\mathfrak{S}$, et qu'elle a pour point multiple d'ordre au moins égal à $l - 2$ tout point multiple d'ordre l de cette même surface; de plus, si l'ordre de multiplicité est $l - 2$, les termes de degré $l - 2$ dans D ne sont pas complètement arbitraires.

Dès lors, pour que la fonction $\Theta(u, v)$, ou $\frac{C}{D}$, reste finie en un point multiple d'ordre l de $\mathfrak{S}$, il est nécessaire que la surface $C = 0$ ait en ce point un point multiple du même ordre que la surface $D = 0$; et l'on voit ainsi que la surface $C = 0$ est une surface (d'ordre $n - 3$), adjointe à $\mathfrak{S}$, et qu'elle se comporte comme la surface $D = 0$, aux points multiples isolés.

Il est également à observer que si la surface $D = 0$, en un point multiple isolé, avait le même cône des tangentes que la surface $\mathfrak{S}$, la surface $C = 0$ jouirait de la même propriété. Cette condition est en effet nécessaire pour que la fonction $\frac{C(x, y, z)}{D(x, y, z)}$ reste finie quand le point (x, y, z) s'approche du point multiple en restant sur $\mathfrak{S}$.

126. A chacune des $p - 1$ fonctions linéairement distinctes Θ_1, $\Theta_2, \ldots, \Theta_{p-1}$, correspond ainsi par la relation (8) une surface d'ordre $n - 3$ adjointe à $\mathfrak{S}$: les $p - 1$ surfaces obtenues sont distinctes linéairement; sinon, en vertu de la relation (8), les $p - 1$ fonctions Θ ne le seraient pas.

Réciproquement, nous allons établir que, si $C = 0$ est l'équation d'une surface d'ordre $n - 3$ *adjointe* à $\mathfrak{S}$, la fonction

$$\frac{C(x_1, x_2, x_3, x_4)}{D(x_1, x_2, x_3, x_4)}$$

est égale, en chaque point de $\mathfrak{S}$, à une fonction linéaire et homogène de $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_{p-1}$.

Nous admettrons d'abord, non seulement que la surface $C = 0$ est adjointe à $\mathfrak{S}$ dans le sens ordinaire du mot, c'est-à-dire qu'elle a pour courbe multiple d'ordre $l - 1$ toute courbe multiple d'ordre l de $\mathfrak{S}$, et pour point multiple d'ordre au moins égal à $l - 2$ tout point multiple d'ordre l de cette surface; mais encore que l'expression

$$x_4(u, v)\frac{C(x, y, z)}{D(x, y, z)}$$

reste finie, sur la surface $\mathfrak{S}$, pour toutes les *valeurs de u, v qui correspondent à des points multiples isolés.*

Nous reviendrons ensuite sur cette restriction, pour nous en débarrasser, ou tout au moins pour lui donner un énoncé géométrique simple et précis.

127. Soient $C(x, y, z) = 0$ une surface d'ordre $n - 3$ adjointe à $\mathfrak{S}$, $F(x, y, z) = 0$ le plan $\lambda_1 x + \lambda_2 y + \lambda_3 z + \lambda_4 = 0$; l'intégrale

$$\mathfrak{J} = \int C(x, y, z)\frac{dx}{S'_y F'_z - S'_z F'_y}$$

est évidemment, d'après l'hypothèse et la théorie générale des intégrales abéliennes, une intégrale de première espèce le long de la courbe plane $S = 0$, $F = 0$, du moins tant que les λ restent quelconques, c'est-à-dire tant que le plan $F = 0$ ne touche pas $\mathfrak{S}$ ou ne passe pas par un des points multiples isolés de cette surface.

Si maintenant on refait en sens inverse les calculs du n° **124**, on met $\mathfrak{J}$ sous la forme

$$\mathfrak{J} = \int \frac{C(x_1, x_2, x_3, x_4)}{D(x_1, x_2, x_3, x_4)}\frac{du}{\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)},$$

étant toujours posé

$$F(u, v) = \lambda_1 x_1(u, v) + \ldots + \lambda_4 x_4(u, v).$$

On voit ainsi que la fonction de u et v

$$\frac{C(x_1, x_2, x_3, x_4)}{D(x_1, x_2, x_3, x_4)}$$

reste finie en tous les points de la courbe $F(u, v) = 0$, considérée dans le champ hyperelliptique ; on en déduit, en faisant varier les λ, qu'elle reste finie en tous les points de $\mathfrak{S}$, les points multiples isolés pouvant seuls être exceptés. Mais cette restriction est inutile, car nous avons admis *a priori* que $\frac{C}{D}$ restait fini en chacun de ces points. Soit alors $\Theta(u, v)$ la fonction $\frac{C}{D}(u, v)$; on a évidemment, puisque les $x_j(u, v)$ sont des fonctions thêta d'ordre h, à caractéristique nulle, et que le degré de $C(x_1, \ldots, x_4)$ surpasse d'une unité celui de $D(x_1, \ldots, x_4)$,

$$\Theta(u + 2\pi i, v) = \Theta(u, v + 2\pi i) = \Theta(u, v),$$

$$\Theta(u + a, v + b) = e^{-hu - h\frac{a}{2}}\Theta(u, v),$$

$$\Theta(u + b, v + c) = e^{-hv - h\frac{c}{2}}\Theta(u, v),$$

ce qui montre, puisque $\Theta(u, v)$ est une fonction entière, que c'est aussi une fonction thêta, d'ordre h, de caractéristique nulle.

Enfin l'intégrale $\mathfrak{J}$ restant finie tout le long de la courbe $F(u, v) = 0$, il est nécessaire (n° **121**) que $\Theta(u, v)$ soit une combinaison linéaire des $p - 1$ fonctions $\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \ldots, \Theta_{p-1}$, et c'est là précisément la réciproque qu'il s'agissait d'établir.

128. Supposons maintenant que $C = 0$ soit l'équation d'une surface d'ordre $n - 3$ ayant pour courbe multiple d'ordre $l - 1$ toute courbe multiple d'ordre l de $\mathfrak{S}$, *sans aucune condition relative aux points multiples isolés;* la démonstration précédente établit que la

fonction de u et v

$$\frac{C(x_1, \ldots, x_4)}{D(x_1, \ldots, x_4)}$$

reste finie en tous les points de $\mathfrak{S}$, les points multiples isolés pouvant seuls être exceptés.

Deux cas sont à distinguer suivant la nature analytique du point multiple :

En premier lieu, et c'est le cas le plus intéressant, il peut arriver qu'à un point multiple, O, de $\mathfrak{S}$, corresponde *une infinité* de systèmes de valeurs des paramètres u et v.

Supposons par exemple, ce que nous pouvons toujours admettre, que O soit le point $x_1 = x_2 = x_3 = 0$; pour que le cas indiqué se présente, il faut que les trois équations $x_1(u, v) = 0$; $x_2(u, v) = 0$; $x_3(u, v) = 0$ aient une infinité de solutions communes et, par suite, il est nécessaire que les fonctions $x_1(u, v)$, $x_2(u, v)$, $x_3(u, v)$ soient divisibles par une même fonction thêta, $\theta(u, v)$.

La surface $\mathfrak{S}$ est alors définie par des relations de la forme

$$\begin{aligned}
x_1 &= \theta(u, v)\,\theta_1(u, v),\\
x_2 &= \theta(u, v)\,\theta_2(u, v),\\
x_3 &= \theta(u, v)\,\theta_3(u, v),\\
x_4 &= \Theta_4(u, v),
\end{aligned}$$

les θ et Θ étant des fonctions thêta.

Inversement, on vérifie sans difficulté qu'une surface ainsi définie admet le point $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ pour point multiple, et à ce point correspondent les couples d'arguments vérifiant l'équation

$$\theta(u, v) = 0.$$

Soit u_0, v_0 un de ces couples; si u et v s'approchent respectivement de u_0 et v_0, le point (x_1, x_2, x_3, x_4) s'approche de O, dans la direction définie par les relations

$$\frac{x_1}{\theta_1(u_0, v_0)} = \frac{x_2}{\theta_2(u_0, v_0)} = \frac{x_3}{\theta_3(u_0, v_0)}.$$

Nous appellerons *point multiple de première catégorie* un point multiple de cette nature.

Reprenons maintenant les deux surfaces $C = 0$, $D = 0$; *si la première a au point* O *un point multiple du même ordre que la surface* $D = 0$, le quotient $x_1 \frac{C(x, y, z)}{D(x, y, z)}$ reste évidemment fini, quand x, y, z s'approche de O en restant sur $\mathfrak{S}$, c'est-à-dire en suivant une des directions tangentes à $\mathfrak{S}$ en ce point. Il n'y a d'exceptions que pour les directions tangentes simultanément aux surfaces $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{D}$, en d'autres termes le quotient

$$x_1 \frac{C(x, y, z)}{D(x, y, z)} \quad \text{ou} \quad \frac{C(x_1, x_2, x_3, x_4)}{D(x_1, x_2, x_3, x_4)},$$

considéré comme fonction de u, v, reste fini pour tous les systèmes de valeurs de u, v qui correspondent au point multiple, sauf peut-être pour certains systèmes *en nombre limité*. Ces systèmes de valeurs ne pourraient être en nombre infini que si les cônes formés par les tangentes en O aux surfaces $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{D}$ avaient une partie commune; c'est là un cas d'exception sur lequel nous reviendrons.

En second lieu, à un point multiple de $\mathfrak{S}$ peut ne correspondre qu'un nombre limité de systèmes de valeurs de u, v; nous n'avons rien à dire de spécial sur ce cas particulier.

Cela posé, nous savons que le quotient $\frac{C}{D}$ reste fini en tous les points (non multiples) de $\mathfrak{S}$, dès que la surface $C = 0$ a pour ligne d'ordre $l - 1$ toute ligne d'ordre l de $\mathfrak{S}$; si de plus cette surface a en chacun des points multiples de $\mathfrak{S}$ un point multiple de même ordre que la surface $\mathfrak{D}$, le quotient $\frac{C}{D}$ considéré comme fonction de u et de v ne pourra devenir infini que pour un nombre limité de systèmes de valeurs de u et de v.

On en conclut alors qu'il reste fini pour toutes les valeurs de u, v.

En effet, la fonction thêta $D[x_1(u, v), \ldots, x_4(u, v)]$ s'annule pour une infinité de systèmes de valeurs de u et v; si le quotient $\frac{C}{D}$ ne devient infini que pour un nombre limité de ces systèmes, il faut que les deux équations $C(u, v) = 0$ et $D(u, v) = 0$ aient une infinité de

solutions communes, ce qui ne peut se présenter que si $C(u, v)$ est divisible par $D(u, v)$, ou par une fonction thêta divisant D. Dans cette dernière hypothèse on pourrait poursuivre le même raisonnement, et on arrive ainsi à établir que $C(u, v)$ est divisible par $D(u, v)$, le quotient étant une fonction thêta.

En d'autres termes, le quotient $\frac{C}{D}$ reste fini en *tous* les points de $\mathfrak{S}$, *sans exception*.

Reste à examiner le cas spécial signalé plus haut, celui où les cônes formés par les tangentes aux surfaces $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{D}$ en un point multiple, auraient en commun un cône γ : en ce cas, pour que $\frac{C}{D}$ reste fini au point considéré, il faut que la surface $C = 0$ y ait un point multiple du même ordre que la surface $D = 0$ et que les génératrices du cône γ touchent également en ce point la surface $C = 0$. On démontre par la méthode suivie plus haut que la condition est nécessaire et suffisante.

129. Voici la conclusion de cette analyse :

Appelons *surface adjointe* à une surface hyperelliptique $\mathfrak{S}$ une surface qui a pour ligne multiple d'ordre $l - 1$ toute ligne multiple d'ordre l de $\mathfrak{S}$, et qui, en tout point multiple isolé de $\mathfrak{S}$, se comporte comme la surface adjointe $\mathfrak{D}$ d'ordre $n - 4$.

Le sens de l'expression *se comporte* est donné par l'analyse précédente; en général il suffira que la surface adjointe ait, au point multiple, un point multiple du même ordre que $\mathfrak{D}$; si le cône des tangentes de $\mathfrak{D}$ en ce point est le même que celui des tangentes de $\mathfrak{S}$, ou s'il comprend une partie de ce dernier cône, la surface adjointe devra jouir de la même propriété que $\mathfrak{D}$.

Sous le bénéfice de cette explication nous pouvons énoncer la proposition géométrique suivante, résultat des recherches des numéros précédents.

130. Théorème I. — *Le nombre des surfaces d'ordre $n - 3$, linéairement distinctes, adjointes à une surface hyperelliptique quelconque $\mathfrak{S}$, d'ordre n, est égal au genre des sections planes de cette surface, diminué d'une unité.*

Si les coordonnées d'un point de la surface hyperelliptique proposée sont proportionnelles à des fonctions thêta, de caractéristique nulle et d'ordre h, ayant en des points $u_1, v_1; \ldots; u_k, v_k; \ldots$, des singularités communes, $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k, \ldots$, les surfaces adjointes d'ordre $n-3$ découperont sur la proposée $\mathfrak{S}$ le système linéaire de courbes ayant pour équation

$$\lambda_1 \Theta_1(u, v) + \lambda_2 \Theta_2(u, v) + \ldots + \lambda_{p-1} \Theta_{p-1}(u, v) = 0,$$

$\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_{p-1}$ *désignant les $p-1$ fonctions thêta, linéairement distinctes, de caractéristique nulle et d'ordre h, qui ont en chaque point u_k, v_k la singularité σ'_k adjointe de la singularité σ_k.*

131. Une méthode analogue à celle qui vient d'être exposée est applicable à la détermination des surfaces adjointes d'un ordre quelconque, $n+q-4$ l'expression *surfaces adjointes* ayant toujours la signification indiquée au n° **129**.

Considérons en effet une surface d'ordre q, quelconque :

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0; \qquad \text{ou} \qquad F(x, y, z) = 0.$$

La fonction de u et v, $F[x_1(u, v), \ldots, x_4(u, v)]$ est une fonction thêta de caractéristique nulle, d'ordre hq, ayant en tout point singulier u_k, v_k la singularité composée $(q\sigma_k)$ (n° **122**). Il en résulte que les intégrales abéliennes de première espèce appartenant à la courbe

$$F[x_1(u, v), \ldots] = 0$$

seront, à part $\int du$ et $\int dv$, de la forme

$$\mathfrak{J} = \int \theta(u, v) \frac{\partial u}{\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)},$$

$\theta(u, v)$ désignant une fonction thêta de caractéristique nulle d'ordre hq, ayant en chaque point u_k, v_k la singularité $(q\sigma_k)'$, adjointe de la singularité $(q\sigma_k)$.

Cette intégrale peut être transformée comme au n° **124**.

Considérons la courbe algébrique intersection des surfaces

$$S(x, y, z) = 0 \qquad \text{et} \qquad F(x, y, z) = 0.$$

On a, le long de cette courbe,

$$\frac{dx}{S'_y F'_z - S'_z F'_y} = \frac{dy}{S'_z F'_x - S'_x F'_z}$$

et

$$\frac{dx}{S'_y F'_z - S'_z F'_y} = \frac{S'_z du}{B(S'_y F'_z - S'_z F'_y) - A(S'_z F'_x - S'_x F'_z)}.$$

D'ailleurs,

$$(9) \qquad F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4^q F(x, y, z),$$

et par suite, le long de la courbe $S = 0$, $F = 0$,

$$(10) \qquad \frac{\partial F}{\partial v} = x_4^q \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \right)$$

d'où, par les calculs du n° **124**,

$$\frac{\partial F}{\partial v} = x_4^q [B(S'_y F'_z - S'_z F'_y) - A(S'_z F'_x - S'_x F'_z)] \frac{1}{DS'_z},$$

ce qui donne pour l'intégrale $\mathfrak{J}$ la forme définitive

$$(11) \qquad \mathfrak{J} = \int \frac{\theta(u, v) D(x, y, z)}{x_4^q} \frac{dx}{S'_y F'_z - S'_z F'_y}.$$

On a ainsi ramené l'intégrale $\mathfrak{J}$, qui est prise le long de la courbe gauche $S = 0$, $F = 0$, à une forme simple; pour qu'elle soit de première espèce, il faut d'abord que, en chaque point de cette courbe, la fonction

$$\frac{\theta(u, v) D(x, y, z)}{x_4^q}$$

soit égale à un polynôme entier d'ordre $n + q - 4$, $C(x, y, z)$. Or cette fonction, étant quadruplement périodique en u et v, est en

chaque point de $\mathfrak{S}$ une fonction rationnelle de x, y, z; la surface $F = 0$ étant quelconque, on voit qu'il est nécessaire qu'*en chaque point de* $\mathfrak{S}$ la fonction rationnelle précédente soit entière, et l'on a ainsi

$$\frac{\theta(u, v)\, D(x, y, z)}{x_4^q} = C(x, y, z),$$

ou, en coordonnées homogènes,

$$\theta(u, v) = \frac{C(x_1, x_2, x_3, x_4)}{D(x_1, x_2, x_3, x_4)}. \tag{12}$$

De plus, la surface $C = 0$ doit être adjointe à la surface $\mathfrak{S}$: on le voit, soit à l'aide de la relation qui précède, soit en exprimant directement que l'intégrale

$$\int C(x, y, z) \frac{dx}{S'_y F'_z - S'_z F'_y}$$

est finie aux points où la surface $F = 0$ coupe les lignes multiples de $\mathfrak{S}$.

La réciproque de cette proposition se démontre sans difficulté, en suivant la marche inverse, comme au n° **127**.

Si en effet $C = 0$ est l'équation d'une surface adjointe à $\mathfrak{S}$, d'ordre $n + q - 4$, l'intégrale

$$\mathfrak{J} = \int C(x, y, z) \frac{dx}{S'_y F'_z - S'_z F'_y}$$

prise le long de la courbe $S = 0$, $F = 0$, peut se mettre sous la forme

$$\int \frac{C(x_1, x_2, x_3, x_4)}{D(x_1, x_2, x_3, x_4)} \frac{du}{\left(\frac{\partial F}{\partial v}\right)},$$

Comme $\mathfrak{J}$, d'après la première forme, est une intégrale abélienne de première espèce, on voit que la fonction $\frac{C[x_1(u, v), \ldots, x_4(u, v)]}{D[x_1(u, v), \ldots]}$ reste finie le long de la courbe considérée et par suite (n^{os} **127-128**) en tout point de $\mathfrak{S}$; $\frac{C}{D}$ est donc une fonction entière de u, v, et, en vertu de son expression même, c'est une fonction thêta, d'ordre qh, et de caractéristique nulle, $\theta(u, v)$. La courbe $\theta(u, v) = 0$ doit d'ailleurs avoir

en chaque point u_k, v_k la singularité $(q\sigma_k)'$, pour que l'intégrale reste finie en ce point. Donc :

THÉORÈME II. — *Les surfaces adjointes d'ordre $n+q-4$ déterminent sur la surface $\mathfrak{S}$ le système de courbes ayant pour équation générale*

$$\lambda_1\theta_1(u,v)+\lambda_2\theta_2(u,v)+\ldots=0, \tag{13}$$

les θ étant des fonctions d'ordre hq, de caractéristique nulle, ayant en u_k, v_k la singularité $(q\sigma_k)'$; réciproquement toute courbe (13) *est sur une surface adjointe d'ordre $n+q-4$.*

132. Calculons maintenant le nombre des surfaces adjointes, linéairement distinctes, d'ordre $n+q-4$.

D'après ce qui précède, il est égal au nombre des fonctions $\theta(u,v)$, linéairement distinctes; toutefois, si q atteint ou dépasse 4, on obtiendra d'autres surfaces adjointes par l'équation

$$SQ=0,$$

où Q est un polynôme quelconque d'ordre $q-4$, renfermant

$$\tfrac{1}{6}(q-3)(q-2)(q-1)$$

coefficients arbitraires, et l'on devra ainsi ajouter au nombre des fonctions $\theta(u,v)$ distinctes le nombre

$$\tfrac{1}{6}(q-3)(q-2)(q-1).$$

Les fonctions thêta linéairement distinctes d'ordre hq et de caractéristique nulle sont en nombre égal à h^2q^2; il faut chercher combien, parmi elles, ont en chaque point u_k, v_k la singularité composée $(q\sigma_k)'$.

Nous allons d'abord démontrer que les conditions imposées à une fonction thêta d'ordre hq et de caractéristique nulle par les singu-

larités $(q\sigma_k)'$ sont indépendantes entre elles; le nombre cherché des fonctions $\theta(u, v)$ sera donc égal à h^2q^2 diminué de la somme des nombres des conditions auxquelles équivaut *chacune* des singularités considérées.

Il a été en effet établi au n° **121** que, si une courbe $\Theta_0(u, v) = 0$ a en des points u_1, v_1; u_2, v_2 ... des singularités $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$, les conditions imposées par les singularités adjointes $\sigma'_1, \sigma'_2, \ldots$, aux courbes du même ordre et de la même famille que $\Theta_0(u, v) = 0$ sont indépendantes; or si $\Theta_0(u, v)$ est un polynôme arbitraire d'ordre q en $x_1(u, v)$, $x_2(u, v)$, $x_3(u, v)$, $x_4(u, v)$, la courbe $\Theta_0 = 0$ n'a pas d'autres singularités que la singularité $(q\sigma_k)$, en chaque point u_k, v_k, et par suite les singularités $(q\sigma_k)'$ sont indépendantes, comme nous voulions l'établir, pour les courbes dont l'équation générale s'obtient en annulant une fonction thêta d'ordre hq, de caractéristique nulle.

Cherchons maintenant à combien de conditions équivaut la singularité $(q\sigma_k)'$.

Soient

C_{kq} le nombre de conditions auxquelles équivaut la singularité $(q\sigma_k)$;
c_k le nombre analogue pour la singularité σ_k;
C'_{kq} le nombre analogue pour la singularité $(q\sigma_k)'$;

on a, d'après le premier théorème de M. Guccia (n° **122**) et celui du n° **120**,

$$C_{kq} = I(q\sigma_k, q\sigma_k) - C'_{kq};$$

le second théorème de M. Guccia (n° **122**) donne

$$C_{kq} = qc_k + \frac{q(q-1)}{2} I(\sigma_k, \sigma_k).$$

Enfin l'on a

$$c_k = I(\sigma_k, \sigma_k) - \tfrac{1}{2} I(\sigma_k, \sigma'_k),$$

en vertu du premier théorème de M. Guccia et de celui du n° **120**. Égalant les deux valeurs de C_{kq}, et éliminant c_k, on obtient la valeur cherchée de C'_{kq},

$$C'_{kq} = I(q\sigma_k, q\sigma_k) - \tfrac{1}{2}q(q+1) I(\sigma_k, \sigma_k) + \frac{q}{2} I(\sigma_k, \sigma'_k).$$

On a d'ailleurs évidemment, d'après la définition même de la singularité $(q\sigma_k)$ [1],

$$I(q\sigma_k, q\sigma_k) = q^2 I(\sigma_k, \sigma_k),$$

et, par suite,

$$C'_{kq} = \tfrac{1}{2} q(q-1) I(\sigma_k, \sigma_k) + \frac{q}{2} I(\sigma_k, \sigma'_k).$$

Il est à remarquer que la somme des nombres C'_{kq}, pour tous les points u_k, v_k, est indépendante des quantités $I(\sigma_k, \sigma_k)$ et $I(\sigma_k, \sigma'_k)$; on a en effet (n° **123**)

$$(14) \qquad \begin{cases} n = 2h^2 - \Sigma I(\sigma_k, \sigma_k), \\ p = h^2 + 1 - \tfrac{1}{2}\Sigma I(\sigma_k, \sigma'_k); \end{cases}$$

d'où

$$\Sigma C'_{kq} = \frac{q(q-1)}{2}(2h^2 - n) + q(h^2 + 1 - p).$$

Le nombre des fonctions $\theta(u, v)$ est ainsi égal à

$$h^2 q^2 - \Sigma C'_{kq} = \frac{q(q-1)}{2} n + q(p-1).$$

Dans cette expression figurent seulement n, p, q.

133. Nous pouvons maintenant énoncer ce théorème :

Théorème III. — *Le nombre des surfaces d'ordre $n+q-4$, linéairement distinctes, adjointes à une surface hyperelliptique d'ordre n et dont les sections planes sont de genre p, est égal à*

$$N_q = \tfrac{1}{2} q(q-1)n + q(p-1) + \tfrac{1}{6}(q-1)(q-2)(q-3) \text{ [2]}.$$

Dans cette formule q est supposé au moins égal à un. Donc aussi :

Les surfaces adjointes d'ordre $n+q-4$ découpent sur la pro-

---

[1] *Voir* Guccia, *Rendiconti del Circolo matem. di Palermo*, t. III, p. 259.

[2] Le terme complémentaire $\frac{1}{6}(q-1)(q-2)(q-3)$ ne doit figurer que si q est au moins égal à quatre; mais, comme il s'annule pour $q = 1, 2, 3$, la formule subsiste pour $q \geqq 1$.

posée une série linéaire de courbes, dont l'équation renferme $\frac{1}{2}q(q-1)n + q(p-1) - 1$ *paramètres arbitraires.*

134. *Remarque.* — Le nombre N_q des surfaces adjointes d'ordre $n+q-4$ peut aussi être trouvé sans faire usage des formules de M. Guccia, par la voie géométrique suivante.

Il résulte des raisonnements faits aux n^{os} **119-121** que le nombre des fonctions $\theta(u, v)$ est égal au nombre des intégrales abéliennes de première espèce appartenant à la courbe $F = 0$, $S = 0$, diminué de deux unités à cause des intégrales $\int du$ et $\int dv$, et augmenté d'une unité, puisque parmi les fonctions $\theta(u, v)$ figure la fonction

$$F[x_1(u, v), \ldots, x_4(u, v)].$$

Soit ϖ le genre de la courbe $F = 0$, $S = 0$, c'est-à-dire le nombre de ses intégrales abéliennes de première espèce; il est toujours entendu que la surface d'ordre q, $F = 0$, est quelconque, c'est-à-dire n'a aucune relation particulière avec $\mathfrak{S}$.

Pour calculer ϖ, cherchons en combien de points, distincts de ses points multiples, la courbe est coupée par une de ses surfaces adjointes d'ordre $n+q-4$: on obtient évidemment une telle surface en combinant la surface $\mathfrak{D}$, d'ordre $n-4$ adjointe à $\mathfrak{S}$, et une surface quelconque d'ordre q; cette dernière coupe la courbe en $q^2 n$ points, et l'on a ainsi

$$2(\varpi - 1) = q^2 n + R_q,$$

R_q étant le nombre des points, situés en dehors des courbes multiples de $\mathfrak{S}$, où la courbe considérée coupe la surface $\mathfrak{D}$, c'est-à-dire le nombre des points où la surface $F = 0$ coupe les courbes unicursales singulières de $\mathfrak{S}$.

Pour $q = 1$, la surface $F = 0$ est un plan; ϖ est alors égal à p, et il vient

$$2(p - 1) = n + R_1.$$

Il est clair d'ailleurs que $R_q = qR_1$; si donc on élimine R_q et R_1, on

trouve pour ϖ

$$\varpi = \tfrac{1}{2}q(q-1)n + q(p-1) + 1.$$

Par suite, le nombre, $\varpi - 1$, des fonctions $\theta(u, v)$ linéairement distinctes est égal à

$$\tfrac{1}{2}q(q-1)n + q(p-1),$$

comme nous l'avions démontré par une voie purement analytique.

135. Parmi les surfaces adjointes, celles qui passent par toutes les courbes unicursales singulières offrent un intérêt spécial.

Soit $C = 0$ une de ces surfaces, d'ordre $n + q - 4$; reprenons la relation

$$(12) \qquad \frac{\theta(u, v)}{x_4^q} = \frac{C(x, y, z)}{D(x, y, z)}$$

vérifiée en tout point de $\mathfrak{S}$. La surface $C = 0$ passant par les courbes unicursales singulières, la fonction $\frac{C}{D}$, considérée comme fonction de x, y, z, reste finie en un point quelconque d'une de ces courbes, pourvu toutefois que ce point ne soit pas à l'infini, c'est-à-dire dans le plan $x_4 = 0$.

Il en résulte que $\frac{C}{D}$, considérée comme fonction de u et v, ne devient pas infinie quand on y remplace u et v par les valeurs u_k, v_k des paramètres u, v qui correspondent à la courbe unicursale considérée; la fonction $\frac{\theta(u, v)}{x_4^q}$ jouira d'après (12) de la même propriété, et par suite la courbe $\theta(u, v) = 0$ aura, en chaque point (u_k, v_k), la même singularité que la courbe $x_4^q = 0$, c'est-à-dire la singularité composée $(q\sigma_k)$.

Réciproquement, soit $\theta(u, v)$ une fonction thêta d'ordre hq, de caractéristique nulle, ayant en chaque point (u_k, v_k) la singularité $(q\sigma_k)$; on a évidemment (n° **131**)

$$\frac{\theta(u, v)}{x_4^q} = \frac{C(x, y, z)}{D(x, y, z)},$$

$C = 0$ étant l'équation d'une surface adjointe d'ordre $n + q - 4$

Le premier membre reste fini par hypothèse quand u et v s'approchent de u_k, v_k $\left(\text{le rapport } \frac{u-u_k}{v-v_k} \text{ étant arbitraire}\right)$; le second membre jouit donc de la même propriété, et par suite $\frac{C}{D}$, considérée comme fonction de x, y, z, reste finie le long des courbes unicursales singulières, ce qui exige que la surface $C = 0$ passe par toutes ces courbes.

Ainsi :

Théorème IV. — *Les surfaces adjointes d'ordre $n+q-4$ qui passent par les courbes unicursales singulières découpent sur* $\mathfrak{S}$ *la série linéaire des courbes comprises dans l'équation*

$$\lambda_1 \theta_1(u, v) + \lambda_2 \theta_2(u, v) + \ldots = 0,$$

où $\theta_1(u, v)$, $\theta_2(u, v)$, ... désignent les fonctions thêta linéairement distinctes d'ordre hq, de caractéristique nulle, ayant en chaque point u_k, v_k la singularité composée $(q\sigma_k)$, et réciproquement.

156. Le nombre des surfaces adjointes d'ordre $n+q-4$, linéairement distinctes et passant par les courbes unicursales singulières est égal d'après cela au nombre des fonctions $\theta(u, v)$ qu'on vient de considérer, augmenté de $\frac{1}{6}(q-1)(q-2)(q-3)$.

Or ce nombre est *au moins* égal à h^2q^2, diminué de la somme des nombres des conditions auxquelles équivaut chacune des singularités $(q\sigma_k)$: nous disons *au moins*, parce qu'il peut arriver, et qu'il arrive en effet, que les conditions imposées aux fonctions thêta, d'ordre hq et de caractéristique nulle, par les singularités $(q\sigma_k)$, ne soient pas indépendantes les unes des autres.

Le nombre C_{kq} des conditions auxquelles équivaut la singularité $q\sigma_k$ se tire des relations du n° **152**; on trouve ainsi

$$C_{kq} = \tfrac{1}{2}q(q+1)I(\sigma_k, \sigma_k) - \tfrac{1}{2}qI(\sigma_k, \sigma_k')$$

et, par suite, en tenant compte des équations (14),

$$\Sigma C_{kq} = \tfrac{1}{2}q(q+1)(2h^2 - n) - q(h^2 + 1 - p).$$

Il vient donc

$$h^2 q^2 - \Sigma C_{kq} = \tfrac{1}{2} q(q+1)n - q(p-1).$$

Ainsi :

Le nombre n_q des surfaces adjointes, linéairement distinctes, d'ordre $n+q-4$, passant par les courbes unicursales singulières de $\mathfrak{S}$ est AU MOINS *égal à*

$$\tfrac{1}{2} q(q+1)n - q(p-1) + \tfrac{1}{6}(q-1)(q-2)(q-3).$$

Si q dépasse une certaine limite, on peut voir que le nombre n_q est *toujours* égal à cette quantité.

137. Une surface adjointe d'ordre $n+q-4$ coupe $\mathfrak{S}$, en dehors des lignes multiples, suivant une courbe dont le degré, d_q, s'évalue aisément.

Il est clair tout d'abord qu'on a

$$d_q = d_1 + n(q-1);$$

on le voit en supposant que la surface adjointe d'ordre $n+q-4$ se décompose en une surface adjointe d'ordre $n-3$ et en une surface quelconque d'ordre $q-1$.

Pour calculer d_1 observons que l'équation de la courbe déterminée sur $\mathfrak{S}$ par une surface adjointe d'ordre $n-3$ a une équation de la forme

$$\Theta(u, v) = 0$$

$\Theta(u, v)$ étant une fonction thêta d'ordre h, douée en chaque point singulier, u_k, v_k, de la singularité σ'_k.

Le degré de cette courbe sera égal au nombre des solutions communes aux deux équations

$$\Theta(u, v) = 0, \qquad x_1(u, v) = 0,$$

abstraction faite des solutions qui coïncident avec un des systèmes singuliers u_k, v_k.

On a ainsi

$$d_1 = 2h^2 - \Sigma I(\sigma_k, \sigma'_k)$$

et par suite, d'après (14),

$$d_1 = 2(p-1);$$

d'où

$$d_q = 2(p-1) + n(q-1).$$

Si la surface adjointe d'ordre $n+q-4$ passe par les courbes unicursales singulières, le degré δ_q de la courbe suivant laquelle elle coupe en outre $\mathfrak{S}$, est de même égal à

$$\delta_1 + n(q-1);$$

or ici on a

$$\delta_1 = 2h^2 - \Sigma I(\sigma_k, \sigma_k) = n;$$

d'où

$$\delta_q = nq.$$

Ce résultat est évident, si l'on observe que la surface adjointe considérée peut se décomposer en une surface d'ordre q, quelconque, et en la surface adjointe $\mathfrak{D}$, d'ordre $n-4$.

La différence $d_1 - \delta_1$ représente la somme des degrés des courbes unicursales singulières; on a

$$d_1 - \delta_1 = 2(p-1) - n.$$

Applications géométriques.

138. Les résultats généraux auxquels nous sommes parvenus relativement aux surfaces adjointes, donnent lieu à des applications géométriques nombreuses, qui vont nous occuper maintenant.

139. I. Tout d'abord ces résultats permettent de vérifier, pour les surfaces hyperelliptiques, la proposition générale si remarquable et si importante qui est due à M. Nöther, et qui est connue sous le nom de *Théorème du Reste* [1].

---

[1] *Math. Annalen*, t. III, p. 509.

Ce théorème s'énonce ainsi :

Si une surface d'un ordre donné, adjointe à une surface algébrique $\mathfrak{S}$, *coupe celle-ci (en dehors des lignes multiples) suivant deux courbes* c_1 *et* c', *on dit que* c_1 *et* c' *sont résiduelles. Toute courbe* c'', *résiduelle de* c_1, *est dite corésiduelle de* c', *par rapport à* c_1.

Cela posé, le théorème du Reste est le suivant :

Lorsque, sur $\mathfrak{S}$, *des courbes* c', c'', ... *sont corésiduelles par rapport à une même courbe* c_1, *elles le sont également par rapport à toute courbe* c_2, *résiduelle de l'une quelconque d'entre elles.*

Dans le cas d'une surface hyperelliptique, soient $\theta_1 = 0$ et $\theta' = 0$ les équations de deux courbes résiduelles, situées sur une surface adjointe d'ordre $n + q - 4$. Le produit $\theta_1\theta'$ sera une fonction thêta, d'ordre hq, de caractéristique nulle, ayant en chaque point u_k, v_k la singularité $(q\sigma_k)'$. Soient $\theta'' = 0$ une courbe résiduelle de $\theta_1 = 0$, et $\theta_2 = 0$ une courbe résiduelle de $\theta' = 0$; les produits $\theta_1\theta''$ et $\theta_2\theta'$ jouiront des mêmes propriétés que le produit $\theta_1\theta'$. Il en résulte, sans difficulté, que la fonction $\theta_2\theta''$ sera aussi une fonction thêta, d'ordre hq, de caractéristique nulle, ayant en u_k, v_k la singularité $(q\sigma_k)'$, ce qui démontre que les courbes $\theta_2 = 0$, $\theta'' = 0$ sont bien sur une même surface adjointe d'ordre $n + q - 4$.

Le théorème du Reste est ainsi vérifié.

140. II. Soient $c_1, c_2, \ldots, c_\rho$ les courbes d'intersection de $\mathfrak{S}$ avec ρ surfaces adjointes, passant par les courbes unicursales singulières, et d'ordres respectifs $n + q_1 - 4$, $n + q_2 - 4$, ..., $n + q_\rho - 4$. *Ces courbes sont sur une même surface adjointe, passant par les courbes unicursales, et d'ordre* $n + (q_1 + q_2 + \ldots + q_\rho) - 4$.

En effet, soient $\Theta_1 = 0$, $\Theta_2 = 0$, ..., $\Theta_\rho = 0$ les équations des ρ courbes considérées; $\Theta_j(u, v)$ est une fonction thêta d'ordre hq_j, de caractéristique nulle, ayant en u_k, v_k la singularité $(q_j\sigma_k)$: donc la fonction thêta, de caractéristique nulle,

$$\Theta_1\Theta_2\ldots\Theta_\rho$$

est d'ordre

$$h(q_1 + q_2 + \ldots + q_\rho)$$

et a en u_k, v_k la singularité

$$(q_1 + q_2 + \ldots + q_\rho)\sigma_k.$$

Ce dernier point découle de la définition même des singularités composées. En d'autres termes, la courbe $\Theta_1\Theta_2\ldots\Theta_\rho = 0$ est, d'après le numéro **155**, sur une surface adjointe d'ordre

$$n + (q_1 + q_2 + \ldots + q_\rho) - 4,$$

passant par les courbes unicursales singulières, ce qui est la proposition énoncée.

Nous ne donnerons de ce résultat que l'application suivante :

Soit c la courbe d'ordre qn suivant laquelle $\mathfrak{S}$ est coupée par une surface adjointe d'ordre $n + q - 4$ passant par les courbes unicursales singulières; il existe une surface adjointe, d'ordre $n + rq - 4$, passant par les courbes unicursales singulières, et ayant en outre, avec $\mathfrak{S}$, un contact d'ordre $r - 1$ tout le long de la courbe c.

Voici une autre proposition de même nature que la précédente.

Soient c_q et c'_s deux courbes, intersections de $\mathfrak{S}$ avec deux surfaces adjointes d'ordres $n + q - 4$ et $n + s - 4$, dont la première passe en outre par les courbes unicursales singulières : *ces deux courbes sont sur une surface adjointe d'ordre $n + q + s - 4$.*

En effet, si $\Theta = 0$, $\Theta' = 0$ sont les équations des deux courbes, la fonction Θ est d'ordre hq et a, en u_k, v_k, la singularité $(q\sigma_k)$; Θ' est d'ordre sq et a, en u_k, v_k, la singularité $(s\sigma_k)'$, c'est-à-dire, comme on le voit aisément, la singularité composée $(s-1)\sigma_k + \sigma'_k$. Le produit $\Theta\Theta'$ est donc une fonction thêta, d'ordre $s + q$, ayant en u_k, v_k la singularité $(q + s - 1)\sigma_k + \sigma'_k$, c'est-à-dire $[(q + s)\sigma_k]'$; elle est d'ailleurs de caractéristique nulle, comme les fonctions Θ et Θ'. La proposition est donc établie; la réciproque est vraie et se démontre de la même manière.

141. III. Proposons-nous de traiter le problème des *surfaces de contact adjointes*, passant par les courbes unicursales singulières, c'est-à-dire de déterminer celles de ces surfaces, de degré $n+q-4$, qui ont un contact d'ordre donné, $r-1$, avec la surface $\mathfrak{S}$ tout le long de la courbe suivant laquelle elles coupent cette surface (en dehors des lignes multiples et des courbes unicursales).

Soit

$$\Theta(u-\lambda, v-\mu)=0$$

l'équation de la courbe de contact d'une des surfaces cherchées, $\Theta(u, v)$ étant une fonction thêta d'ordre ρ et de caractéristique nulle; il faut et il suffit, pour que la courbe réponde au problème géométrique, que $\Theta^r(u-\lambda, v-\mu)$ soit une fonction thêta, d'ordre hq, et que la courbe $\Theta^r(u-\lambda, v-\mu)=0$ soit l'intersection avec $\mathfrak{S}$ d'une surface adjointe d'ordre $n+q-4$, passant par les courbes unicursales singulières.

La condition relative à l'ordre de Θ^r donne l'égalité

$$r\rho = hq.$$

Nous *supposerons* que r est un diviseur de q, c'est-à-dire que $q=rm$; on aura donc

$$\rho = hm.$$

En second lieu, pour que la courbe $\Theta^r(u-\lambda, v-\mu)=0$ puisse être l'intersection de $\mathfrak{S}$ avec une surface adjointe d'ordre $n+q-4$ passant par les courbes unicursales, il faut d'abord qu'elle appartienne à la même famille que la courbe $\Theta_0(u, v)=0$, où $\Theta_0(u, v)$ est une fonction d'ordre hq, de caractéristique nulle : cette condition entraîne les congruences (n^{os} **111** et **112**)

$$\left.\begin{array}{l} r\rho\lambda \equiv 0 \\ r\rho\mu \equiv 0 \end{array}\right\} \text{(mod. périodes)}, \qquad \text{d'où} \qquad \begin{array}{l} \lambda = \dfrac{\mathfrak{P}}{r\rho} \\ \mu = \dfrac{\mathfrak{P}'}{r\rho} \end{array},$$

$\mathfrak{P}$ et $\mathfrak{P}'$ étant deux périodes simultanées quelconques.

Il faut ensuite que la courbe $\Theta^r(u-\lambda, v-\mu)=0$ ait la singularité $(q\sigma_k)$ en chaque point u_k, v_k, ce qui exige que la courbe

$\Theta(u-\lambda, v-\mu)=0$ ait en u_k, v_k la singularité $\left(\frac{q}{r}\sigma_k\right)$, c'est-à-dire $(m\sigma_k)$ [1].

Ces conditions sont d'ailleurs suffisantes.

Nous pouvons maintenant former l'équation générale des courbes de contact.

En effet, ces courbes appartiennent tout d'abord à un certain nombre de familles, déterminées par l'ordre ρ ou hm des fonctions thêta correspondantes et par l'un des systèmes de valeurs de λ et μ obtenus plus haut. Pour calculer le nombre de ces familles, il suffit d'observer que deux courbes

$$\Theta_0\left(u-\frac{\Phi}{r\rho}, v-\frac{\Phi'}{r\rho}\right)=0,$$

$$\Theta_1\left(u-\frac{\Phi_1}{r\rho}, v-\frac{\Phi'_1}{r\rho}\right)=0,$$

où $\Theta_0(u, v)$ et $\Theta_1(u, v)$ sont des fonctions d'ordre ρ ou hm, de caractéristique nulle, appartiendront à la même famille si l'on a (n° **111**)

$$\left.\begin{array}{lll} \rho\dfrac{\Phi-\Phi_1}{r\rho}\equiv 0, & \text{c'est-à-dire} & \dfrac{\Phi-\Phi_1}{r}\equiv 0 \\ \rho\dfrac{\Phi'-\Phi'_1}{r\rho}\equiv 0, & \text{c'est-à-dire} & \dfrac{\Phi'-\Phi'_1}{r}\equiv 0 \end{array}\right\} \text{(mod. périodes)}.$$

On aura donc autant de familles distinctes qu'il y a de $r^{\text{ièmes}}$ de périodes simultanées, c'est-à-dire r^4.

Soit une courbe d'une des r^4 familles, $\Theta(u-\lambda, v-\mu)=0$; pour qu'elle soit une des courbes de contact cherchées, il ne nous reste qu'à exprimer qu'elle a, en u_k, v_k, la singularité $m\sigma_k$.

Or l'équation générale des courbes d'une de nos familles dépend linéairement de ρ^2, c'est-à-dire h^2m^2, coefficients; celles de ces courbes linéairement distinctes, qui ont en chaque point u_k, v_k la singularité $m\sigma_k$ sont en nombre *au moins* égal à

$$h^2m^2-\Sigma C_{km},$$

---

[1] C'est à ce point de l'analyse que nous sommes obligé de supposer $q=rm$.

C_{km} étant le nombre des conditions auxquelles équivaut la singularité $m\sigma_k$. Or on a trouvé (n° **136**)

$$h^2 m^2 - \Sigma C_{km} = \tfrac{1}{2} m(m+1)n - m(p-1).$$

Ainsi, les courbes de contact cherchées se répartissent en r^4 familles; et, dans chaque famille, elles forment une série linéaire $\frac{1}{2}m(m+1)n - m(p-1) - 1$ fois infinie, au moins.

Ces courbes jouissent de propriétés géométriques simples.

Considérons d'abord r courbes de contact, appartenant à une *même* des r^4 familles trouvées plus haut; soient

$$\Theta_1\left(u - \frac{\mathfrak{P}}{r\rho}, v - \frac{\mathfrak{P}'}{r\rho}\right) = 0,$$
$$\Theta_2\left(u - \frac{\mathfrak{P}}{r\rho}, \cdots\cdots\right) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$\Theta_r\left(u - \frac{\mathfrak{P}}{r\rho}, \cdots\cdots\right) = 0$$

leurs équations; la fonction

$$\Theta_1\left(u - \frac{\mathfrak{P}}{r\rho}, v - \frac{\mathfrak{P}'}{r\rho}\right)\Theta_2\left(u - \frac{\mathfrak{P}}{r\rho}, \cdots\right)\cdots\Theta_r\left(u - \frac{\mathfrak{P}}{r\rho}, \cdots\right)$$

est évidemment une fonction thêta d'ordre $r\rho$, c'est-à-dire d'ordre qh, et de caractéristique nulle; de plus, elle a en chaque point u_k, v_k la singularité $(q\sigma_k)$, puisque chacun des ρ facteurs du produit a la singularité $(m\sigma_k)$ et que l'on a

$$q = rm.$$

En d'autres termes, les r courbes considérées sont sur une surface adjointe d'ordre $n + q - 4$ passant par les courbes unicursales singulières.

On démontrerait de même que par $r - 1$ courbes de contact données, appartenant à des familles *différentes*, et par les courbes unicursales singulières, on peut faire passer des surfaces adjointes d'ordre $n + q - 4$, qui découpent sur $\mathfrak{S}$ une des r^4 familles de courbes de contact.

142. L'énoncé suivant résume ces résultats :

Soit $\mathfrak{S}$ une surface hyperelliptique quelconque, d'ordre n et dont les sections planes sont de genre p; désignons par q, r, m trois entiers positifs quelconques, tels que

$$q = rm.$$

Les surfaces d'ordre $n + q - 4$, adjointes à $\mathfrak{S}$, passant par les courbes unicursales singulières de $\mathfrak{S}$, et ayant avec cette surface, tout le long de la courbe suivant laquelle elles la coupent en outre, un contact d'ordre $r - 1$, se répartissent en r^4 systèmes.

Pour les surfaces d'un même système, les courbes de contact appartiennent à un même ordre et à une même famille; elles forment, dans cette famille, une série linéaire dont l'équation renferme

$$\tfrac{1}{2} m(m+1)n - m(p-1) - 1$$

paramètres, au moins.

Les r courbes de contact de r surfaces d'un même système sont sur une surface adjointe d'ordre $n + q - 4$, passant par les courbes unicursales singulières.

Par $r - 1$ courbes de contact appartenant à des systèmes quelconques et par les courbes unicursales singulières, on peut mener une infinité de surfaces adjointes d'ordre $n + q - 4$, qui découpent en outre sur $\mathfrak{S}$ une des r^4 séries de courbes de contact.

Parmi les r^4 systèmes de surfaces de contact, celui qui correspond aux valeurs $\mathfrak{P} = 0$, $\mathfrak{P}' = 0$ est particulièrement remarquable : les courbes de contact correspondantes ayant pour équation générale

$$\Theta(u, v) = 0,$$

où $\Theta(u, v)$ est une fonction d'ordre hm, de caractéristique nulle, douée en chaque point u_k, v_k de la singularité $m\sigma_k$, sont les intersections de $\mathfrak{S}$ avec les surfaces adjointes d'ordre $n + m - 4$, menées par les courbes unicursales singulières.

Ce résultat concorde d'ailleurs avec une application faite au n° **140**.

Le problème des surfaces de contact, dans les conditions qui viennent d'être exposées, n'est possible, *en général*, que si le nombre $\frac{1}{2}m(m+1)n - m(p-1) - 1$, qui est celui des paramètres variables dont dépend l'équation des courbes de contact d'une même famille, est supérieur ou égal à zéro. On doit donc avoir, sauf en certains cas exceptionnels,

$$\tfrac{1}{2}m(m+1)n - m(p-1) - 1 \geqq 0 \quad (^1).$$

Cette condition est toujours remplie, n et p étant fixes, dès que m dépasse une certaine limite.

En particulier, en faisant $m = 1$, on voit que, si l'inégalité

$$n \geqq p$$

est vérifiée, il existera, *quel que soit* q, q^4 systèmes de surfaces adjointes d'ordre $n + q - 4$ passant par les courbes unicursales singulières, et ayant avec $\mathfrak{S}$, tout le long du reste de leur intersection avec cette surface, un contact d'ordre $q - 1$.

143. Terminons par l'exposé de *nouvelles propriétés* des courbes de contact, dans le cas général.

Soient deux courbes de contact, appartenant à deux familles différentes

$$\Theta\left(u - \frac{\mathfrak{P}}{2\rho}, v - \frac{\mathfrak{P}'}{2\rho}\right) = 0, \qquad \Theta_1\left(u - \frac{\mathfrak{P}_1}{2\rho}, v - \frac{\mathfrak{P}'_1}{2\rho}\right) = 0.$$

La fonction

$$\theta(u, v) = \Theta\left(u - \frac{\mathfrak{P}}{2\rho}, v - \frac{\mathfrak{P}'}{2\rho}\right)\Theta_1\left(u - \frac{\mathfrak{P}_1}{2\rho}, v - \frac{\mathfrak{P}'_1}{2\rho}\right)$$

est une fonction thêta d'ordre 2ρ, c'est-à-dire $2hm$, ayant en chaque point u_k, v_k la singularité $(2m\sigma_k)$. Pour que la courbe $\theta(u, v) = 0$ soit sur une surface adjointe d'ordre $n + 2m - 4$, passant par les courbes unicursales singulières, il faut et il suffit qu'elle soit de la

(1) Le système remarquable de surfaces de contact signalé plus haut existe toujours, même si l'inégalité n'est pas vérifiée.

même famille que la courbe $\Theta_0(u, v) = 0$, où $\Theta_0(u, v)$ est une fonction thêta, d'ordre $2hm$ et de caractéristique nulle, c'est-à-dire (n° **111**) que l'on ait

$$\frac{\mathfrak{P} + \mathfrak{P}_1}{r} = 0, \qquad \frac{\mathfrak{P}' + \mathfrak{P}'_1}{r} = 0 \qquad \text{(mod. périodes)}.$$

Si $\frac{\mathfrak{P}}{r}$ et $\frac{\mathfrak{P}'}{r}$ sont donnés, il est toujours possible, et d'une seule manière, de choisir $\frac{\mathfrak{P}_1}{r}$ et $\frac{\mathfrak{P}'_1}{r}$, de manière à satisfaire à ces congruences. Donc :

Par une courbe de contact quelconque et par les courbes unicursales singulières, on peut faire passer une infinité de surfaces adjointes d'ordre $n + 2m - 4$, qui découpent en outre sur $\mathfrak{S}$ une des r^4 séries de courbes de contact.

Cette série reste la même quand la courbe primitivement considérée varie sans cesser d'appartenir à une même famille.

On démontre de même la proposition plus générale qui suit :

Par $s - 1$ courbes de contact appartenant à des familles quelconques et par les courbes unicursales singulières, on peut faire passer une infinité de surfaces adjointes d'ordre $n + sm - 4$, qui découpent en outre sur $\mathfrak{S}$ une des r^4 séries de courbes de contact.

Dans cet énoncé, le nombre positif, s, est quelconque, mais supérieur à 1.

On peut ajouter que chacune des r^4 séries de courbes de contact peut être obtenue par ce procédé, les $s - 1$ courbes primitives étant convenablement choisies, ou plutôt étant prises arbitrairement dans des familles convenablement choisies.

Enfin il existe des relations géométriques entre les *surfaces de contact* qui répondent à des *problèmes différents;* en voici un exemple, qu'il serait aisé d'étendre.

Considérons deux multiples consécutifs de r,

$$q = rm,$$
$$q_1 = r(m + 1);$$

soient c_m et c_{m+1} les courbes de contact avec $\mathfrak{S}$ de deux surfaces adjointes d'ordres respectifs $n+q-4$, $n+q_1-4$, passant par les courbes unicursales singulières, et ayant avec $\mathfrak{S}$, tout le long du reste de leur intersection, un contact d'ordre $r-1$.

Les équations de ces deux courbes sont de la forme

$$\Theta\left(u-\frac{\mathfrak{P}}{hmr},\ v-\frac{\mathfrak{P}'}{hmr}\right)=0,$$

$$\Theta_1\left[u-\frac{\mathfrak{P}_1}{h(m+1)r},\ v-\frac{\mathfrak{P}'_1}{h(m+1)r}\right]=0,$$

et l'on démontre, comme plus haut, que, si l'on a

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathfrak{P}}{r}+\frac{\mathfrak{P}_1}{r}&\equiv 0\\ \frac{\mathfrak{P}'}{r}+\frac{\mathfrak{P}'_1}{r}&\equiv 0\end{aligned}\right\}\ \text{(mod. périodes)},$$

les deux courbes considérées sont sur une même surface adjointe d'ordre $n+2m-3$, passant par les courbes unicursales singulières.

144. IV. *Sections planes.* — Le nombre des surfaces d'ordre $n-3$ adjointes à $\mathfrak{S}$ étant égal au genre des sections planes de cette surface diminuée d'une unité, on voit de suite que les courbes d'ordre $n-3$, adjointes à une section plane, ne sont pas toutes situées sur des surfaces adjointes d'ordre $n-3$.

Pour étudier la question de plus près, observons que, parmi les $p-1$ surfaces adjointes d'ordre $n-3$ figurent les surfaces décomposables

$$D(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\lambda_3 x_3+\lambda_4 x_4)=0,$$

où les λ sont des constantes arbitraires, et où $D=0$ est toujours l'équation de la surface adjointe d'ordre $n-4$.

Soit alors $x_2=0$, par exemple, une section plane de $\mathfrak{S}$: le plan $x_2=0$ coupe le système linéaire, $p-2$ fois infini, des surfaces adjointes d'ordre $n-3$ suivant un système linéaire de courbes d'ordre $n-3$ qui ne sera que $p-3$ fois infini, puisque, parmi les surfaces adjointes, figure la surface $Dx_2=0$.

On obtient ainsi $p-2$ courbes d'ordre $n-3$, linéairement distinctes, adjointes à la section de $\mathfrak{S}$ par le plan considéré; cette section étant de genre p admet encore deux courbes adjointes distinctes des précédentes, et il résulte des raisonnements faits aux n^{os} **120, 124** que ces deux courbes sont nécessairement celles qui correspondent aux intégrales $\int du$ et $\int dv$.

Au contraire, si q dépasse un, toutes les courbes d'ordre $n+q-4$ adjointes à une section plane de $\mathfrak{S}$ sont les sections, par le plan considéré, des surfaces d'ordre $n+q-4$ adjointes à $\mathfrak{S}$.

On le démontre aisément comme il suit :

En premier lieu, quel est le nombre des courbes linéairement distinctes d'ordre $n+q-4$ adjointes à une courbe plane d'ordre n et de genre p? ($q>1$). Ces courbes découpent sur la proposée des groupes équivalents de N points mobiles, formant un système *non spécial*, puisque q dépasse un; p points d'un de ces groupes sont donc déterminés par les $N-p$ autres, et, par suite, le nombre des courbes adjointes d'ordre $n+q-4$, linéairement distinctes, est égal à

$$N-p+1.$$

Toutefois, si q atteint ou dépasse 4, on devra ajouter à ce nombre le nombre $\frac{1}{2}(q-3)(q-2)$ des coefficients d'un polynôme entier, d'ordre $q-4$, par rapport à deux variables, afin de tenir compte des courbes adjointes qui se décomposent en la courbe proposée et en une courbe quelconque de degré $q-4$.

Pour calculer N, il suffit de considérer le cas où la courbe adjointe d'ordre $n+q-4$ se décompose en une courbe adjointe d'ordre $n-3$ et en une courbe quelconque d'ordre $q-1$; on a ainsi

$$N=2(p-1)+n(q-1),$$

et le nombre des courbes adjointes linéairement distinctes d'ordre $n+q-4$ est égal à

$$n(q-1)+p-1+\tfrac{1}{2}(q-2)(q-3).$$

Cette formule est vraie pour toutes les valeurs de q, supérieures à

un, même pour $q = 2$ et $q = 3$, puisque le terme complémentaire $\frac{1}{2}(q-2)(q-3)$ s'annule pour ces deux valeurs.

En second lieu, soit N_q le nombre des surfaces d'ordre $n+q-4$ linéairement distinctes, adjointes à $\mathfrak{S}$; parmi ces surfaces il en est N_{q-1} qui se décomposent en une surface adjointe d'ordre $n+q-5$ et en un plan donné : on en conclut que les sections par un plan des surfaces adjointes d'ordre $n+q-4$ forment un système linéaire, renfermant un nombre de courbes linéairement distinctes égal à

$$N_q - N_{q-1},$$

c'est-à-dire (n° **133**)

$$n(q-1)+p-1+\tfrac{1}{2}(q-2)(q-3),$$

nombre qui est bien égal à celui des courbes d'ordre $n+q-4$, adjointes à la section plane de la surface $\mathfrak{S}$.

Donc :

Les courbes d'ordre $n+q-4$ adjointes à la section plane générale d'une surface hyperelliptique sont les sections, par le plan de la courbe, des surfaces d'ordre $n+q-4$ adjointes à la surface proposée, dès que q dépasse l'unité.

145. V. Il est difficile d'établir, sur une surface hyperelliptique générale, la classification des courbes algébriques d'un degré donné : le degré d, d'une courbe $\Theta(u, v) = 0$, présentant en un point singulier u_k, v_k, la singularité s_k, est en effet, si l'on désigne par m l'ordre de la fonction $\Theta(u, v)$, donné par l'équation

$$d = 2hm - \Sigma I(\sigma_k, s_k).$$

Ce degré dépend donc des singularités dont la fonction $\Theta(u, v)$ est douée aux points singuliers u_k, v_k.

Il y a lieu d'observer que si $\Theta(u, v)$ s'annule au point u_k, v_k, la courbe $\Theta(u, v) = 0$, sur la surface $\mathfrak{S}$, *rencontre* la courbe unicursale singulière qui correspond aux valeurs u_k, v_k des arguments, et réciproquement.

Les courbes qui ne rencontrent aucune des courbes unicursales singulières [1] sont donc, d'après la formule précédente, d'ordre $2hm$; leur degré est ainsi divisible par $2h$. Parmi ces courbes, celles de degré minimum s'obtiennent en faisant $m = 1$; elles sont représentées par l'équation générale

$$\mathfrak{S}(u - \lambda, v - \mu) = 0, \tag{17}$$

où λ et μ sont deux constantes quelconques et $\mathfrak{S}$ une fonction thêta d'ordre un. On peut supposer que $\mathfrak{S}(u, v)$ est la fonction normale, d'ordre un et de caractéristique $\begin{vmatrix} 10 \\ 11 \end{vmatrix}$ (n° **59**).

Nous appellerons *courbes* γ les courbes représentées par l'équation (17); *ces courbes,* en nombre doublement infini, *sont,* comme on l'a dit, *les courbes du plus petit degré qu'on puisse tracer sur la surface hyperelliptique, sans rencontrer les courbes unicursales singulières;* elles sont d'ordre $2h$, ce qui donne la signification géométrique du nombre h, ordre des fonctions thêta qui servent à représenter les coordonnées d'un point de $\mathfrak{S}$.

Les courbes γ sont de genre deux et sont représentables point par point l'une sur l'autre (n° **60**).

Sur une courbe de genre deux, on appelle *points conjugués* deux points formant un groupe $\mathcal{G}_{2(p-1)}$; d'après ce que nous avons dit au n° **62**, deux points conjugués sur la courbe $\mathfrak{S}(u - \lambda, v - \mu) = 0$ ont pour arguments u, v et $2\lambda - u$, $2\mu - v$. En particulier, les points d'une courbe γ, qui coïncident avec leurs conjugués, sont au nombre de six et ont pour arguments $\lambda + \frac{\mathfrak{P}_i}{2}$, $\mu + \frac{\mathfrak{P}'_i}{2}$, en désignant par $\frac{\mathfrak{P}_i}{2}$, $\frac{\mathfrak{P}'_i}{2}$ un des six couples de demi-périodes dont le tableau a été donné au n° **59**.

Ces six points seront dits les *pôles* de la courbe γ à laquelle ils appartiennent; inversement une courbe γ sera dite *courbe polaire* de chacun de ses six pôles. On vérifie sans difficulté qu'*un point quel-*

---

[1] Ces courbes peuvent couper les lignes unicursales singulières en des points *fixes,* qui sont les points multiples de première catégorie (n° **128**).

conque u_0, v_0 *a six courbes polaires*, correspondant aux valeurs de λ et μ égales à $u_0 + \frac{\mathfrak{P}_i}{2}$, $v_0 + \frac{\mathfrak{P}'_i}{2}$.

Il existe entre les courbes γ et les points de $\mathfrak{S}$ une réciprocité remarquable que les théorèmes suivants mettent en évidence [1].

146. Considérons les courbes γ qui passent par un point donné u_0, v_0 et cherchons le lieu de leurs pôles.

Si

$$(17) \qquad \mathfrak{I}(u - \lambda, v - \mu) = 0$$

est une de ces courbes, on aura

$$(18) \qquad \mathfrak{I}(\lambda - u_0, \mu - v_0) = 0,$$

puisque $\mathfrak{I}(u, v)$ est une fonction impaire. Si U, V est un pôle de la courbe (17), on a

$$U = \lambda + \tfrac{1}{2}\mathfrak{P}_i, \qquad V = \mu + \tfrac{1}{2}\mathfrak{P}'_i, \qquad (i = 1, 2, \ldots 6).$$

Éliminant λ et μ entre ces deux équations et l'équation (18), on trouve le lieu cherché :

$$\mathfrak{I}(U - u_0 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{P}_i, V - v_0 - \tfrac{1}{2}\mathfrak{P}'_i) = 0.$$

La courbe représentée par cette équation est une courbe γ, qui passe par le point u_0, v_0 et admet ce point pour pôle. Donc :

Les six pôles d'une courbe γ qui passe par un point sont chacun sur une des six courbes polaires de ce point.

De même, on démontre sans difficulté que :

Les six courbes polaires d'un point d'une courbe γ passent chacune par un des pôles de cette courbe.

---

[1] C'est la réciprocité qui existe entre les plans tangents et les points de la surface de Kummer.

Ces théorèmes justifient les dénominations de pôles et de courbes polaires, et établissent la réciprocité dont nous parlions plus haut.

147. *Par deux points donnés de* $\mathfrak{S}$ *passent deux courbes* γ, et inversement *deux courbes* γ *se coupent en deux points.* Ces propositions résultent immédiatement du théorème de M. Poincaré.

Cherchons les conditions auxquelles doivent satisfaire deux points u_1, v_1 et u_2, v_2 pour que les deux courbes γ qui passent par ces points coïncident.

Si $\mathfrak{F}(u-\lambda, v-\mu)$ est l'équation d'une courbe γ passant par les deux points, on a

$$\mathfrak{F}(\lambda - u_1, \mu - v_1) = 0, \qquad \mathfrak{F}(\lambda - u_2, \mu - v_2) = 0.$$

Ces deux équations en λ, μ ont deux solutions communes, λ_1, μ_1 et λ_2, μ_2, liées (n° **65**) par les relations

$$\lambda_1 + \lambda_2 \equiv u_1 + u_2, \qquad \mu_1 + \mu_2 \equiv v_1 + v_2 \qquad \text{(mod. périodes)}.$$

Si

$$\lambda_1 = \lambda_2 \qquad \text{et} \qquad \mu_1 = \mu_2,$$

il vient

$$2\lambda_1 \equiv u_1 + u_2, \qquad 2\mu_1 \equiv v_1 + v_2 \qquad \text{(mod. périodes)}.$$

Écrivant maintenant que λ_1 et μ_1 vérifient la relation

$$\mathfrak{F}(\lambda_1 - u_1, \mu_1 - v_1) = 0,$$

on trouve la condition cherchée

$$(19) \qquad \mathfrak{F}\left(\frac{u_1 - u_2}{2}, \frac{v_1 - v_2}{2}\right) = 0.$$

On peut donner une interprétation géométrique de cette formule. Considérons en effet les courbes γ qui passent par un point u_2, v_2, et cherchons le lieu du point conjugué de u_2, v_2 sur chacune d'elles.

Soit $\mathfrak{F}(u-\lambda, v-\mu) = 0$ une des courbes γ passant par u_2, v_2; on a

$$\mathfrak{F}(\lambda - u_2, \mu - v_2) = 0.$$

Le conjugué de u_2, v_2 sur cette courbe a pour arguments

$$u = 2\lambda - u_2; \qquad v = 2\mu - v_2;$$

il décrit donc la courbe

$$(20) \qquad \vartheta\left(\frac{u-u_2}{2}, \frac{v-v_2}{2}\right) = 0.$$

Si l'on compare maintenant les équations (19) et (20), on obtient cette proposition :

Lorsque deux points sont conjugués sur une même courbe γ, la seconde courbe γ qui passe par ces deux points coïncide avec la première, et réciproquement.

148. Une autre propriété de la courbe (20) résulte des considérations suivantes.

Cherchons *l'enveloppe des courbes γ qui passent par un point fixe u_2, v_2.*

Deux de ces courbes

$$\vartheta(u-\lambda, v-\mu) = 0; \qquad \vartheta(u-\lambda', v-\mu') = 0$$

se coupent en u_2, v_2 et en un second point, u, v, tel que l'on ait

$$u + u_2 \equiv \lambda + \lambda'; \qquad v + v_2 \equiv \mu + \mu' \qquad \text{(mod. périodes)}.$$

Si les deux courbes primitives sont infiniment voisines, on aura, à la limite,

$$u \equiv 2\lambda - u_2; \qquad v \equiv 2\mu - v_2;$$

on obtiendra le lieu de u, v, c'est-à-dire l'enveloppe cherchée, en éliminant λ, μ entre les deux équations qui précèdent et la relation

$$\vartheta(\lambda - u_2, \mu - v_2) = 0,$$

qui exprime que la courbe γ considérée passe par u_2, v_2; il vient ainsi

$$(20) \qquad \vartheta\left(\frac{u-u_2}{2}, \frac{v-v_2}{2}\right) = 0.$$

Donc : *L'enveloppe des courbes γ qui passent par un point coïncide avec le lieu des conjugués de ce point.*

Dans cet énoncé, nous appelons *points conjugués* deux points conjugués l'un de l'autre sur une même courbe γ.

149. Cherchons la condition qui exprime que deux courbes γ :

$$\mathfrak{S}(u-\lambda_1, v-\mu_1)=0; \qquad \mathfrak{S}(u-\lambda_2, v-\mu_2)=0$$

sont *tangentes :* on trouve aisément, par des considérations semblables aux précédentes, que cette condition est la suivante

$$\mathfrak{S}\left(\frac{\lambda_1-\lambda_2}{2}, \frac{\mu_1-\mu_2}{2}\right)=0.$$

Par suite :

Lorsque deux points sont conjugués sur une courbe γ, chacune des six courbes polaires de l'un touche une des six courbes de l'autre; réciproquement, lorsque deux courbes γ se touchent, chacun des six pôles de l'une est conjugué d'un des six pôles de l'autre.

On en déduit immédiatement cet autre théorème :

Le lieu des pôles des courbes γ qui touchent une courbe γ fixe se décompose en six courbes, dont chacune est lieu des conjugués d'un pôle de la courbe fixe.

150. Les courbes γ forment une famille doublement infinie : dans cette famille considérons une série simplement infinie et *algébrique* de courbes γ; λ et μ seront alors liés par une relation de la forme

$$\Theta(\lambda, \mu)=0,$$

$\Theta(\lambda, \mu)$ désignant une fonction uniforme quadruplement périodique de λ, μ, ou, si l'on veut, une fonction thêta de λ, μ.

Le lieu des pôles des courbes γ considérées est donné par l'équation

$$\Theta\left(u-\frac{\mathfrak{P}_i}{2}, v-\frac{\mathfrak{P}'_i}{2}\right)=0;$$

il se décompose donc en six courbes, généralement distinctes, de même genre et de mêmes modules.

Plus généralement, sur chacune des courbes

$$\vartheta(u-\lambda, v-\mu)=0,$$

où λ, μ vérifient la relation $\Theta(\lambda, \mu)=0$, prenons le point qui correspond à un point fixe u_0, v_0 de la courbe $\vartheta(u, v)=0$ dans la transformation univoque qui lie ces deux courbes; ce point sera (n° **60**)

$$u=\lambda+u_0, \qquad v=\mu+v_0.$$

Il décrit par suite la courbe

$$\Theta(u-u_0, v-v_0)=0.$$

Ainsi :

Soit une série algébrique, quelconque d'ailleurs de courbes γ : *le lieu du point qui, sur chacune de ces courbes, correspond univoquement à un même point* M *de l'une d'elles, est une courbe algébrique; si le point* M *varie, on obtient ainsi une infinité simple de courbes algébriques, qui sont toutes de même genre et de mêmes modules : l'équation générale de ces courbes est de la forme*

$$\Theta(u-\alpha, v-\beta)=0,$$

$\Theta(u, v)$ *étant une fonction thêta, et* α, β *deux paramètres, variables d'une courbe à l'autre, liés par la relation*

$$\vartheta(\alpha, \beta)=0.$$

Inversement, il est clair que, sur chacune des nouvelles courbes, le point qui correspond univoquement à un même point de l'une d'elles décrit une des courbes γ de la série considérée : la démonstration est identique à celle qui précède.

Ces résultats se généralisent sans difficulté.

Soit une série quelconque simplement infinie de courbes de même

genre et de mêmes modules, tracées sur une surface hyperelliptique et comprises dans l'équation

$$\theta(u-\lambda, v-\mu)=0, \tag{21}$$

où $\theta(u, v)$ est une fonction thêta donnée et où λ, μ désignent deux paramètres liés par une relation de la forme

$$\Theta(\lambda, \mu)=0,$$

$\Theta(\lambda, \mu)$ étant une nouvelle fonction thêta.

Considérons la seconde série de courbes

$$\Theta(u-\alpha, v-\beta)=0,$$

où α et β sont deux paramètres liés par la relation

$$\theta(\alpha, \beta)=0.$$

Les courbes de cette nouvelle série sont aussi de même genre et de mêmes modules, et les deux séries jouissent de la propriété suivante :

Le lieu du point qui, sur chacune des courbes d'une série, correspond univoquement à un même point de l'une de ces courbes, est une courbe de l'autre série.

Si les deux fonctions $\theta(u, v)$ et $\Theta(u, v)$ sont les mêmes, les courbes des deux séries se confondent; il en est de même si $\theta(u, v)$ est une fonction paire ou impaire et si $\Theta(u, v)=\theta(u-u_0, v-v_0)$; u_0, v_0 étant des constantes données. Dans ce dernier cas, les courbes de la première série passent par le point fixe u_0, v_0. En particulier :

Considérons les courbes γ qui passent par un point fixe : le lieu du point qui sur chacune d'elles correspond univoquement à un même point d'une courbe γ donnée est une courbe γ passant par le point fixe.

Le théorème du n° **146** est un cas particulier du précédent.

151. VI. Revenons maintenant aux surfaces adjointes : la formule qui fait connaître le nombre des surfaces adjointes d'ordre $n+q-4$, linéairement distinctes, donne lieu à une remarque intéressante.

On sait que deux définitions ont été proposées pour le genre d'une surface d'ordre n.

Le *genre géométrique*, P, est le nombre des surfaces d'ordre $n-4$, linéairement distinctes, adjointes à la proposée;

Le *genre numérique*, P′, s'obtient en faisant $N = n - 4$ dans la formule qui donne le nombre des surfaces distinctes d'ordre N satisfaisant aux conditions des surfaces adjointes, c'est-à-dire ayant pour courbe multiple d'ordre $l-1$ toute courbe multiple d'ordre l et pour point multiple d'ordre $l-2$ tout point multiple d'ordre l de la proposée.

Ces deux définitions, en apparence identiques, ne le sont pas réellement : en effet, on ne sait pas déterminer à l'aide d'une formule générale le nombre des conditions auxquelles équivaut, pour une surface d'ordre N, l'obligation d'avoir pour courbe multiple d'ordre $l-1$ une courbe donnée, que si N est suffisamment grand par rapport au degré de la courbe. Pour ce cas, il existe une formule générale exacte, mais on ne sait pas pour quelle valeur minimum de N elle cesse de s'appliquer. En d'autres termes, les courbes et les points multiples d'une surface d'ordre n étant donnés, on sait calculer le nombre des surfaces adjointes d'ordre N, N étant suffisamment grand : si dans la formule ainsi obtenue on fait $N = n - 4$, rien ne prouve qu'on doive obtenir réellement le nombre des surfaces adjointes d'ordre $n-4$; on trouve un nombre P′, qui peut différer de P, mais qui est également intéressant, parce qu'il possède le caractère d'invariance dans les transformations birationnelles, comme l'ont montré MM. Cayley et Zeuthen.

Pour les surfaces représentables point par point sur le champ hyperelliptique, on a (n° **102**)

$$P = 1;$$

quant à P′, on le calculera, d'après ce qui précède, en faisant $q = 0$ dans la formule qui donne le nombre des surfaces adjointes d'ordre $n+q-4$, et l'on trouve ainsi

$$P' = -1.$$

Les deux nombres P et P′ sont donc différents. Il convient de supposer, dans cette application, que la surface $\mathfrak{S}$ n'a pas de points multiples isolés; en ce cas, notre définition des surfaces adjointes coïncide avec celle qui est généralement adoptée.

CHAPITRE IV.

Classes particulières de surfaces hyperelliptiques.

152. Les plus simples des surfaces hyperelliptiques sont *celles qui n'ont pas de courbes unicursales singulières.*

Pour une de ces surfaces, les fonctions $x_1(u, v)$; $x_2(u, v)$; $x_3(u, v)$; $x_4(u, v)$ sont quatre fonctions thêta, de caractéristique nulle, d'ordre h, ne s'annulant simultanément pour aucun système de valeurs des paramètres.

Les formules du n° **125** donnent alors, pour l'ordre n de la surface et le genre p de ses sections planes,

$$n = 2h^2, \qquad p = h^2 + 1; \qquad \text{ou} \qquad p = \frac{n+2}{2}.$$

Ainsi :

Si une surface hyperelliptique n'a pas de courbes unicursales singulières, son ordre est le double d'un carré.

153. *Surfaces adjointes.* — Le nombre des surfaces adjointes, linéairement distinctes, d'ordre $n + q - 4$, a pour expression (n° **153**)

$$q^2h^2 + \tfrac{1}{6}(q-1)(q-2)(q-3);$$

ces surfaces découpent, sur la proposée, un système linéaire $q^2h^2 - 1$ fois infini de courbes ayant pour équation générale (n° **151**)

$$\lambda_1\theta_1(u, v) + \lambda_2\theta_2(u, v) + \ldots + \lambda_{q^2h^2}\theta_{q^2h^2}(u, v) = 0,$$

où $\theta_1(u, v), \ldots, \theta_{q^2h^2}(u, v)$ désignent q^2h^2 fonctions thêta, d'ordre qh et de caractéristique nulle, linéairement distinctes; en d'autres termes,

toute fonction thêta, d'ordre qh et de caractéristique nulle, égalée à zéro, représente sur $\mathfrak{S}$ une courbe qui est l'intersection de $\mathfrak{S}$ avec une surface adjointe d'ordre $n+q-4$ [1].

Le degré de cette courbe est égal à $2qh^2$ ou qn (n° **137**).

Le problème des *surfaces adjointes de contact* est susceptible d'une solution plus complète que dans le cas général.

Cherchons les surfaces adjointes d'ordre $n+q-4$ qui ont avec $\mathfrak{S}$, tout le long de la courbe commune, un contact d'ordre $r-1$: on voit, comme au n° **141**, que le problème n'est possible que si l'on a

$$hq = r\rho,$$

ρ étant un entier; mais il n'est pas nécessaire de supposer ici que r divise q, et le problème comporte ainsi une solution plus étendue que celui des surfaces adjointes de contact passant par les courbes unicursales singulières d'une surface hyperelliptique générale.

Soit $\Theta(u-\lambda, v-\mu)=0$ l'équation d'une des courbes de contact cherchées; $\Theta(u, v)$ sera une fonction thêta *quelconque*, d'ordre ρ et de caractéristique nulle; λ, μ seront deux constantes vérifiant les congruences,

$$\left.\begin{array}{l} r\rho\lambda \equiv 0 \\ r\rho\mu \equiv 0 \end{array}\right\} \text{(mod périodes)}.$$

On le démontre par la méthode appliquée au n° **141**.

On en conclut, toujours comme au n° **141**, que les courbes de contact sont *toutes* celles qui appartiennent à r^4 familles, et l'on peut énoncer le théorème général suivant :

Soit $\mathfrak{S}$ une surface hyperelliptique sans courbes unicursales singulières, d'ordre $n(=2h^2)$; désignons par q, r, ρ des entiers positifs tels que

$$qh = r\rho.$$

---

[1] Pour abréger, nous dirons qu'une courbe est l'intersection de $\mathfrak{S}$ avec une surface adjointe quand elle constitue, jointe aux courbes multiples, l'intersection complète des deux surfaces.

Les surfaces d'ordre $n+q-4$ adjointes à $\mathfrak{S}$, et ayant avec cette surface, tout le long de leur courbe d'intersection (non multiple), un contact d'ordre $r-1$, se répartissent en r^4 systèmes.

Pour les surfaces d'un système, les courbes de contact sont des courbes d'un même ordre et d'une même famille, et forment une série linéaire ρ^2-1 fois infinie. Inversement toute courbe de l'ordre et de la famille considérée est la courbe de contact d'une des surfaces du système.

Les r courbes de contact de r surfaces d'un même système sont sur une surface adjointe d'ordre $n+q-4$.

Par $r-1$ courbes de contact appartenant à des systèmes quelconques on peut mener une surface adjointe d'ordre $n+q-4$, qui coupe en outre $\mathfrak{S}$ suivant une $r^{ième}$ courbe de contact.

Cette théorie est au fond la même que celle qui a été exposée au n° **117** pour les courbes du champ hyperelliptique sans point singulier.

En particulier, si l'on fait $q=1$, $r=h$, on voit que :

Il existe h^4 surfaces d'ordre $n-3$ adjointes à $\mathfrak{S}$ et ayant avec cette surface, le long de leur intersection, un contact d'ordre $h-1$.

Les h^4 courbes de contact sont des courbes γ; par $r-1$ d'entre elles passe une surface adjointe d'ordre $n-3$, coupant en outre $\mathfrak{S}$ suivant une $r^{ième}$ de ces courbes.

On a des théorèmes tout à fait analogues pour les surfaces adjointes d'ordre $n+q-4$ passant par une ou plusieurs courbes données sur $\mathfrak{S}$ et ayant en outre avec $\mathfrak{S}$, tout le long du reste de l'intersection, un contact d'ordre $r-1$; ces surfaces se répartissent encore en r^4 systèmes; les courbes de contact de r surfaces d'un même système et les courbes fixes données sur $\mathfrak{S}$ sont sur une même surface adjointe d'ordre $n+q-4$; ....

Ces propriétés, qui offrent une analogie complète avec celles que l'on a établies pour les courbes de contact adjointes à une courbe plane, ne s'étendent pas, du moins, sous cette forme générale, aux surfaces hyperelliptiques douées de courbes unicursales singulières.

154. *Courbes tracées sur la surface.* — L'équation d'une courbe algébrique quelconque tracée sur $\mathfrak{S}$ s'obtient en égalant à zéro une fonction thêta : si q est l'ordre de celle-ci, le degré de la courbe correspondante sera $2hq$: ainsi, les degrés des courbes tracées sur $\mathfrak{S}$ sont des multiples de $2h$.

Si q est inférieur à h, on peut, à une fonction thêta d'ordre q, associer au moins une fonction d'ordre $h-q$, de telle sorte que le produit des deux fonctions soit une fonction thêta d'ordre h et de caractéristique nulle (n° **116**); donc :

Par une courbe quelconque, tracée sur $\mathfrak{S}$, et dont l'ordre est inférieur à l'ordre n de la surface, on peut faire passer au moins une surface adjointe d'ordre $n-3$.

De plus :

Si $2qh$ est l'ordre de la courbe considérée, le nombre des surfaces adjointes d'ordre $n-3$, linéairement distinctes, passant par la courbe, est égal à $(h-q)^2$.

De même on démontrerait que :

Par une courbe d'ordre $2qh$, tracée sur $\mathfrak{S}$, et dont l'ordre est compris entre n et $2n-1$ (c'est-à-dire telle que $2h > q \geqq h$) on peut faire passer $(2h-q)^2$ surfaces adjointes d'ordre $n-2$, linéairement distinctes, etc.

Rien n'est plus aisé que de déterminer toutes les courbes d'un degré donné $2hq$, que l'on peut tracer sur $\mathfrak{S}$: leur équation générale est de la forme

$$\lambda_1\theta_1(u-\lambda, v-\mu)+\lambda_2\theta_2(u-\lambda, v-\mu)+\ldots \\ +\lambda_{q^2}\theta_{q^2}(u-\lambda, v-\mu)=0,$$

où $\lambda_1, \ldots, \lambda_{q^2}, \lambda, \mu$ sont des constantes arbitraires, et où $\theta_1(u, v)$, $\theta_2(u, v), \ldots$ désignent q^2 fonctions thêta linéairement distinctes, d'ordre q et de caractéristique nulle.

Les courbes du plus petit degré, que l'on puisse tracer sur la surface, ont l'ordre $2h$, et sont les courbes γ [1].

135. *Remarque.* — Les courbes découpées sur $\mathfrak{S}$ par les surfaces adjointes d'ordre $n+q-4$ forment un système linéaire q^2h^2-1 fois infini; le genre de ces courbes est q^2h^2+1 (n° **114**); deux d'entre elles se coupent en $2q^2h^2$ points, d'après le théorème de M. Poincaré : la connaissance de ces nombres nous permet de discuter une formule, due à M. Nöther, et qui est une extension aux surfaces du théorème de Riemann-Roch relatif aux courbes algébriques.

D'après M. Nöther, si l'on appelle :

C des courbes du genre π, situées sur une surface algébrique $\mathfrak{S}$, et formant un système linéaire Q fois infini;
s le nombre de points d'intersection de deux courbes C;
P le genre de la surface $\mathfrak{S}$, supposée de degré n;
ρ le nombre des surfaces d'ordre $n-4$ linéairement distinctes adjointes à $\mathfrak{S}$, et passant par une courbe C,

on a l'inégalité

$$Q \geqq P + s - \pi - \rho + 1.$$

Si nous appliquons la formule à une surface hyperelliptique $\mathfrak{S}$, et au système des courbes C découpées sur elle par les surfaces adjointes d'ordre $n+q-4$, nous trouvons, puisque $\rho = 0$,

$$q^2h^2 - 1 \geqq P + 2q^2h^2 - (q^2h^2+1) + 1 \qquad \text{ou} \qquad -1 \geqq P.$$

---

[1] Il est à observer que les courbes γ, bien qu'étant toutes du même ordre et du même genre et formant un système continu, n'appartiennent pas à une série *linéaire* de courbes de même ordre qu'elles, c'est-à-dire de courbes découpées sur $\mathfrak{S}$ par un système linéaire de surfaces, chaque surface mobile ne découpant qu'une courbe. Ce fait ne s'est pas présenté sur la surface de Kummer, où toutes les courbes d'un degré donné se répartissaient en une ou plusieurs séries linéaires; la raison générale de cette différence tient à l'existence sur $\mathfrak{S}$ des deux intégrales de première espèce $\int du$ et $\int dv$, comme nous l'avons montré dans une Note insérée aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (28 août 1893).

Or le genre géométrique, P est égal à 1; la formule n'est donc pas vérifiée pour cette valeur de P. Elle l'est au contraire si l'on introduit, au lieu du genre géométrique, le genre numérique P′, égal ici à -1. Il y a donc lieu de penser que la formule générale de M. Nöther doit être précisée, soit dans le sens que nous indiquons, soit en tenant compte des intégrales de différentielles totales de première espèce appartenant à la surface.

156. *Les surfaces hyperelliptiques qui n'ont pour courbes unicursales singulières que des droites,* c'est-à-dire pour lesquelles les quatre courbes coordonnées $x_j(u, v)$ considérées dans le champ hyperelliptique n'ont en commun que des points simples, jouissent d'une propriété spéciale.

Dans ce cas, en effet, la singularité σ_k, que présentent les courbes $x_j(u, v) = 0$ en un de leurs points simples communs, n'est pas une singularité proprement dite, et les courbes adjointes ne sont pas assujetties à passer par ce point. En d'autres termes, la singularité σ'_k n'existe pas.

Il en résulte (n° **150**) que les surfaces adjointes d'ordre $n-3$ découperont sur $\mathfrak{S}$ la série linéaire de courbes dont l'équation s'obtient en égalant à zéro une fonction thêta quelconque d'ordre h et de caractéristique nulle, renfermant, par suite, sous forme linéaire et homogène, h^2 coefficients arbitraires.

Les propriétés des surfaces de contact adjointes d'ordre $n-3$ seront ainsi les mêmes, pour la surface $\mathfrak{S}$ considérée, que pour les surfaces sans courbes unicursales singulières, en particulier il existe h^4 surfaces adjointes d'ordre $n-3$ ayant avec $\mathfrak{S}$, le long de leur intersection, un contact d'ordre $h-1$, etc.

Le nombre h est lié ici au genre p des sections planes de $\mathfrak{S}$ par la relation

$$p = h^2 + 1.$$

CHAPITRE V.

Étude de quelques surfaces hyperelliptiques.

157. Nous étudierons, dans ce Chapitre, quelques surfaces représentables point par point sur le champ hyperelliptique : nous n'avons pas réussi à déterminer d'une manière générale le degré minimum des surfaces de cette nature; il résulte des recherches de M. Picard que ce degré est supérieur à cinq; nous avons, d'autre part, formé des surfaces hyperelliptiques d'ordre huit. Il ne resterait donc, pour combler la lacune, qu'à former des surfaces d'ordre six et sept, ou à démontrer, ce qui semble probable, que le degré doit nécessairement dépasser sept.

Quoi qu'il en soit, nous allons faire connaître et étudier quelques surfaces d'ordre huit.

158. Soient $\mathfrak{T}_0(u, v)$; $\mathfrak{T}_1(u, v)$; $\mathfrak{T}_2(u, v)$; $\mathfrak{T}_3(u, v)$ quatre fonctions thêta *normales*, du premier ordre, formant un groupe de Rosenhain (n° **20**) : pour fixer les idées, nous supposerons qu'elles ont respectivement pour symboles (n° **20**) $11'$, $12'$, $13'$, $11'$.

La fonction $\mathfrak{T}_0(u, v)$ est ainsi la fonction thêta (paire) d'ordre un, de caractéristique nulle, et les trois fonctions $\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2, \mathfrak{T}_3$ s'annulent pour la demi-période $u = 0$, $v = 0$.

De plus, le produit $\mathfrak{T}_0\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2\mathfrak{T}_3$ étant une fonction impaire, de caractéristique nulle (n° **21**), il en sera de même du produit $\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2\mathfrak{T}_3$.

Cela posé, considérons la surface définie par les relations

$$(1)\qquad x_1 = \mathfrak{T}_0\mathfrak{T}_1^2, \qquad x_2 = \mathfrak{T}_0\mathfrak{T}_2^2, \qquad x_3 = \mathfrak{T}_0\mathfrak{T}_3^2, \qquad x_4 = \mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2\mathfrak{T}_3$$

ou, en coordonnées cartésiennes,

$$(2)\qquad x = \frac{\mathfrak{T}_0\mathfrak{T}_1}{\mathfrak{T}_2\mathfrak{T}_3}, \qquad y = \frac{\mathfrak{T}_0\mathfrak{T}_2}{\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_3}, \qquad z = \frac{\mathfrak{T}_0\mathfrak{T}_3}{\mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2}.$$

Les quatre fonctions coordonnées, $x_j(u, v)$, sont des fonctions thêta, d'ordre trois et de caractéristique nulle, s'annulant à la fois

pour les valeurs de u, v qui vérifient les équations

$$\mathfrak{T}_0(u, v) = 0, \qquad \mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2\mathfrak{T}_3 = 0$$

et qui sont au nombre de *six*, d'après le théorème de M. Poincaré. De plus, les fonctions $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3$ devenant nulles pour $u = 0$, $v = 0$, le point $u = 0$, $v = 0$ est un point double pour les courbes du champ hyperelliptique $x_1(u, v) = 0$, $x_2(u, v) = 0$, $x_3(u, v) = 0$ et un point triple pour la courbe $x_4(u, v) = 0$; par suite, c'est un point double pour toute courbe $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 + \lambda_4 x_4 = 0$ et il diminue le degré de la surface (1) de quatre unités (n° **125**).

En résumé, les zéros communs aux fonctions $x_j(u, v)$ diminuent le degré de $6 + 4 = 10$ unités; ce degré est donc égal à $2.3^2 - 10 = 8$. Ainsi :

La surface définie par les relations (1) *est d'ordre huit.*

Nous la désignerons par Σ.

Il est aisé d'obtenir son équation.

Les relations (1) donnent en effet sans difficulté

$$(3) \qquad \mathfrak{T}_0^2 = \frac{1}{\mathfrak{T}_0}\frac{x_1 x_2 x_3}{x_4^2},$$

$$\mathfrak{T}_1^2 = \frac{1}{\mathfrak{T}_0} x_1, \qquad \mathfrak{T}_2^2 = \frac{1}{\mathfrak{T}_0} x_2, \qquad \mathfrak{T}_3^2 = \frac{1}{\mathfrak{T}_0} x_3;$$

les fonctions $\mathfrak{T}_0^2$, $\mathfrak{T}_1^2$, $\mathfrak{T}_2^2$, $\mathfrak{T}_3^2$ sont donc respectivement proportionnelles à $x_1 x_2 x_3$; $x_1 x_4^2$; $x_2 x_4^2$; $x_3 x_4^2$, et l'équation de la surface Σ s'obtiendra en remplaçant $\mathfrak{T}_0^2$, $\mathfrak{T}_1^2$, $\mathfrak{T}_2^2$, $\mathfrak{T}_3^2$ par leurs valeurs proportionnelles dans l'équation homogène classique qui lie les carrés de quatre fonctions thêta d'un même groupe de Rosenhain.

Cette dernière relation est la suivante

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & a_1^2(\mathfrak{T}_0^1\mathfrak{T}_1^1 + \mathfrak{T}_2^1\mathfrak{T}_3^1) + a_2^2(\mathfrak{T}_0^1\mathfrak{T}_2^1 + \mathfrak{T}_1^1\mathfrak{T}_3^1) + a_3^2(\mathfrak{T}_0^1\mathfrak{T}_3^1 + \mathfrak{T}_1^1\mathfrak{T}_2^1) \\ & \quad - 2a_2a_3\mathfrak{T}_2^2\mathfrak{T}_3^2(\mathfrak{T}_0^1 - \mathfrak{T}_1^1) - 2a_1a_3\mathfrak{T}_1^2\mathfrak{T}_3^2(\mathfrak{T}_0^1 + \mathfrak{T}_2^1) \\ & \quad - 2a_1a_2\mathfrak{T}_1^2\mathfrak{T}_2^2(\mathfrak{T}_0^1 + \mathfrak{T}_3^1) - 2a_2a_3\mathfrak{T}_0^2\mathfrak{T}_1^2(\mathfrak{T}_2^1 - \mathfrak{T}_3^1) \\ & \quad + 2a_1a_3\mathfrak{T}_0^2\mathfrak{T}_2^2(\mathfrak{T}_1^1 + \mathfrak{T}_3^1) - 2a_1a_2\mathfrak{T}_0^2\mathfrak{T}_3^2(\mathfrak{T}_3^1 + \mathfrak{T}_2^1) \\ & \qquad\qquad + 2\lambda\,\mathfrak{T}_0^2\mathfrak{T}_1^2\mathfrak{T}_2^2\mathfrak{T}_3^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Les coefficients a_1, a_2, a_3, λ dépendent des périodes des fonctions hyperelliptiques considérées; nous renverrons, pour leur expression, au Mémoire de Rosenhain.

On a d'après cela pour l'équation de Σ

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} & a_1^2 x_2^2 x_3^2 (x_1^4 + x_4^4) + a_2^2 x_1^2 x_3^2 (x_2^4 + x_4^4) + a_3^2 x_1^2 x_2^2 (x_3^4 + x_4^4) \\ & \quad - 2 a_2 a_3 x_1^2 x_2 x_3 (x_2^2 x_3^2 - x_4^4) - 2 a_1 a_3 x_2^2 x_1 x_3 (x_1^2 x_3^2 + x_4^4) \\ & - 2 a_1 a_2 x_3^2 x_1 x_2 (x_1^2 x_2^2 + x_4^4) - 2 a_2 a_3 x_1^2 x_2 x_3 x_4^2 (x_2^2 - x_3^2) \\ & + 2 a_1 a_3 x_2^2 x_1 x_3 x_4^2 (x_1^2 + x_3^2) - 2 a_1 a_2 x_3^2 x_1 x_2 x_4^2 (x_1^2 + x_2^2) \\ & \qquad\qquad + 2 \lambda x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2 = 0. \end{aligned}\right.$$

Remplaçant $\frac{x_1}{x_4}$, $\frac{x_2}{x_4}$, $\frac{x_3}{x_4}$ par x, y, z, on obtiendrait l'équation cartésienne de Σ, à laquelle nous donnerons plus loin une forme simple [1].

159. On voit que Σ est bien du huitième ordre; cette surface, en coordonnées cartésiennes, admet pour centre l'origine $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, ainsi qu'on pouvait s'en rendre compte *a priori* : en effet, si l'on change u et v en $-u$, $-v$, les fonctions x_1, x_2, x_3 restent inaltérées et x_4 change de signe, puisque $\mathfrak{S}_0$, $\mathfrak{S}_1^2$, $\mathfrak{S}_2^2$, $\mathfrak{S}_3^2$ sont des fonctions paires et que $\mathfrak{S}_1 \mathfrak{S}_2 \mathfrak{S}_3$ est une fonction impaire.

La surface Σ est liée d'une manière simple à la surface de Kummer. Posons en effet

$$(6)\qquad X = \frac{\mathfrak{S}_1^2}{\mathfrak{S}_0^2}(u, v), \qquad Y = \frac{\mathfrak{S}_2^2}{\mathfrak{S}_0^2}(u, v), \qquad Z = \frac{\mathfrak{S}_3^2}{\mathfrak{S}_0^2}(u, v).$$

Le point X, Y, Z décrit une surface de Kummer, puisque $\mathfrak{S}_0^2$, $\mathfrak{S}_1^2$, $\mathfrak{S}_2^2$, $\mathfrak{S}_3^2$ sont des fonctions thêta d'ordre deux et de caractéristique nulle, linéairement distinctes (n° **12**); cette surface admet pour plans singuliers les plans de coordonnées et le plan de l'infini, qui forment un tétraèdre de Rosenhain.

---

[1] L'équation (5) représente, quelles que soient les constantes a_1, a_2, a_3, λ, une surface Σ, parce que l'équation (4), où les $\mathfrak{S}$ sont considérées comme des coordonnées homogènes, représente toujours une surface de Kummer (*voir* le n° **159**).

Entre les coordonnées X, Y, Z d'un point de la surface de Kummer et les coordonnées x, y, z d'un point de Σ, correspondant aux mêmes valeurs de u, v, on trouve aisément, en éliminant les $\mathfrak{S}$, entre les relations (2) et (6), les équations

$$(7) \qquad X = \frac{1}{yz}, \qquad Y = \frac{1}{xz}, \qquad Z = \frac{1}{xy};$$

d'où l'on tire

$$(8) \qquad x = \frac{X}{\sqrt{XYZ}}, \qquad y = \frac{Y}{\sqrt{XYZ}}, \qquad Z = \frac{Z}{\sqrt{XYZ}}.$$

Ainsi à un point de la surface de Kummer correspondent deux points de Σ symétriques par rapport à l'origine et à un point de Σ correspond un seul point de la surface de Kummer.

Soient $K(X, Y, Z) = 0$ l'équation de cette dernière surface et $\Sigma(x, y, z) = 0$ celle de Σ; on a, d'après (4) et (6),

$$K(X, Y, Z) = C_2(X, Y, Z) + 2B_3(X, Y, Z) + A_2^2(X, Y, Z),$$

C_2, B_3, A_2 étant des polynômes homogènes en X, Y, Z d'ordre marqué par l'indice

$$\begin{aligned}
C_2 &= a_1^2X^2 + a_2^2Y^2 + a_3^2Z^2 - 2a_1a_2XY - 2a_1a_3XZ - 2a_2a_3YZ,\\
B_3 &= -a_2a_3X(Y^2 - Z^2)\\
&\quad + a_1a_3Y(X^2 + Z^2) - a_1a_2Z(X^2 + Y^2) + \lambda XYZ,\\
A_2 &= a_1YZ - a_2ZX - a_3XY.
\end{aligned}$$

On en déduit pour le polynôme $\Sigma(x, y, z)$ la forme simple

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Sigma(x, y, z) &= x^2y^2z^2C_2(x, y, z)\\ &\quad + 2xyzB_3(x, y, z) + A_2^2(x, y, z); \end{aligned} \right.$$

on a de plus identiquement

$$(10) \qquad K(x, y, z) = \frac{1}{x^4y^4z^4}\Sigma(x, y, z).$$

160. Cela posé, les formes (5) (9) et (10) que nous avons données à l'équation de la surface Σ mettent en évidence les propriétés suivantes.

En coordonnées homogènes, les six arêtes du tétraèdre de référence sont des droites doubles de Σ. Les trois arêtes qui partent du point $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, c'est-à-dire les trois axes des coordonnées cartésiennes, sont en même temps des courbes unicursales singulières : en effet, les courbes unicursales singulières de Σ, abstraction faite de celle qu'on obtient en faisant $u = 0$, $v = 0$, correspondent aux valeurs de u, v qui annulent simultanément $\mathfrak{S}_0$ et $\mathfrak{S}_1\,\mathfrak{S}_2\,\mathfrak{S}_3$. Or les quatre fonctions $\mathfrak{S}_0$, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$ forment un groupe de Rosenhain et par suite des deux systèmes de valeurs (demi-périodes) de u, v qui annulent à la fois $\mathfrak{S}_0$ et $\mathfrak{S}_1$; l'un annule $\mathfrak{S}_2$ et l'autre annule $\mathfrak{S}_3$. Même remarque pour les systèmes qui annulent à la fois $\mathfrak{S}_0$ et $\mathfrak{S}_2$, ou $\mathfrak{S}_0$ et $\mathfrak{S}_3$.

Il en résulte, si l'on se reporte aux relations (1), que les courbes unicursales singulières considérées se réduisent aux trois droites $x_1 = 0$, $x_2 = 0$; $x_1 = 0$, $x_3 = 0$; $x_2 = 0$, $x_3 = 0$; chacune d'elles étant obtenue *deux* fois.

La courbe unicursale singulière qui correspond aux valeurs $u = 0$, $v = 0$ est une conique, qui est située dans le plan $x_4 = 0$; en effet, $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$, $\mathfrak{S}_3$ s'annulent pour $u = 0$, $v = 0$, et $\mathfrak{S}_0$ ne s'annule pas ; si donc on donne à u et v des valeurs très petites, $x_4(u, v)$ est infiniment petit par rapport aux trois autres fonctions x_1, x_2, x_3.

L'équation de cette conique s'obtient en faisant $x_4 = 0$ dans (5) et en divisant par $x_1^2\,x_2^2\,x_3^2$; on trouve ainsi

$$C_2(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

C'est une conique qui touche les trois arêtes du tétraèdre de référence situées dans le plan $x_4 = 0$.

En coordonnées cartésiennes (9), on voit que l'origine est un point quadruple de Σ ; le cône des tangentes en ce point est le cône du second ordre

$$A_2(x, y, z) = 0$$

compté deux fois ; ce cône passe par les trois axes de coordonnées. Il

est à observer que l'origine (ou le point $x_1 = x_2 = x_3 = 0$) est un point multiple de *première catégorie* (n° **128**); si en effet, dans les relations (1), on donne à u, v des valeurs annulant $\vartheta_0(u, v)$, on trouve $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

161. La surface d'ordre quatre adjointe à Σ se trouve aisément; on pourrait la chercher directement par l'étude des lignes doubles, mais la marche suivante est plus simple.

La surface de Kummer, $K(X, Y, Z) = 0$, admet, comme nous le savons, une intégrale double de fonction rationnelle ne devenant jamais infinie; la fonction K étant d'ordre quatre, cette intégrale a pour expression

$$\int\int \frac{dX\,dY}{K'_Z}.$$

Sous le signe $\int\int$ remplaçons X, Y, Z par leurs valeurs (7) en fonction rationnelle de x, y, z, c'est-à-dire par $\frac{1}{yz}, \frac{1}{xz}, \frac{1}{xy}$; l'intégrale nouvelle restera finie pour tous les systèmes de valeurs de x, y, z qui correspondent à un point de la surface Σ, et par suite elle sera de la forme

$$\int\int \frac{D(x, y, z)\,dx\,dy}{\Sigma'_z},$$

D étant le polynôme d'ordre quatre adjoint à Σ.

Or les relations

$$X = \frac{1}{yz}, \qquad Y = \frac{1}{zx}$$

donnent

$$(11) \qquad dX\,dY = -\frac{dx\,dy}{x^2 y^2 z^3}\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} + z\right),$$

$\frac{\partial z}{\partial x}$ et $\frac{\partial z}{\partial y}$ étant les dérivées partielles de z par rapport à x et à y, déduites de la relation

$$\Sigma(x, y, z) = 0.$$

La relation identique (10),

$$K(X, Y, Z) = \frac{1}{x^4 y^4 z^4}\,\Sigma(x, y, z)$$

donne, en chaque point de la surface $\Sigma = 0$,

$$K'_Z = \frac{1}{x^2 y^2 z^2}\left(\Sigma'_x \frac{\partial x}{\partial Z} + \Sigma'_y \frac{\partial y}{\partial Z} + \Sigma'_z \frac{\partial z}{\partial Z}\right),$$

$\frac{\partial x}{\partial Z}, \frac{\partial y}{\partial Z}, \frac{\partial z}{\partial Z}$ étant les dérivées partielles, par rapport à Z, de x, y, z considérés comme fonctions des trois variables X, Y, Z. Or on tire de (8)

$$-2\frac{\partial x}{\partial Z} = \frac{X}{Z\sqrt{XYZ}}, \qquad -2\frac{\partial y}{\partial Z} = \frac{Y}{Z\sqrt{XYZ}}, \qquad 2\frac{\partial z}{\partial Z} = \frac{1}{\sqrt{XYZ}}$$

et, en remplaçant X, Y, Z par leurs valeurs en x, y, z, il vient

$$(12) \qquad 2K'_Z = \frac{1}{x^3 y^3 z^3}(-x\Sigma'_x - y\Sigma'_y + z\Sigma'_z).$$

D'ailleurs on a

$$-x\Sigma'_x - y\Sigma'_y + z\Sigma'_z = \Sigma'_z\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} + z\right),$$

et, par suite, d'après (11) et (12),

$$\int\int \frac{dX\,dY}{K'_Z} = -2\int\int \frac{xyz}{\Sigma'_z}\,dx\,dy.$$

Cette formule montre que la surface adjointe $D = 0$ a pour équation $xyz = 0$, c'est-à-dire, en revenant aux coordonnées homogènes, $x_1 x_2 x_3 x_4 = 0$, puisque cette surface est d'ordre quatre.

La surface adjointe du quatrième degré se décompose donc en quatre plans, qui sont les faces du tétraèdre de référence : il en résulte que la surface Σ n'a pas d'autres lignes multiples que les arêtes de ce tétraèdre, qui sont des lignes doubles; on le voit de suite en faisant successivement $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, dans l'équation (5).

Il y a lieu d'observer toutefois que les six arêtes ne jouent pas le même rôle géométrique. Si l'on considère en effet la section de la surface Σ par un plan quelconque P, cette section a six points doubles en chacun des six points où P coupe les arêtes; mais on démontrerait sans difficulté que chacun des trois points doubles situés dans le plan

$x_4 = 0$ diminue le genre de la section de trois unités, tandis que les trois autres points doubles, situés sur les arêtes qui partent du point $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, sont des points de rebroussement ordinaires. Les trois premiers points doubles sont donc d'une nature toute particulière; les deux branches de la courbe passant par chacun d'eux y ont un contact d'ordre élevé.

La section plane de Σ est ainsi de genre

$$\tfrac{1}{2}\cdot 7\cdot 6 - 3\cdot 3 - 3 = 9,$$

comme on le savait *a priori*, car les quatre courbes $x_j(u, v) = 0$, considérées dans le champ hyperelliptique, ont six points simples et un point double ($u = v = 0$) communs; dès lors la formule

$$p = h^2 + 1 - \tfrac{1}{2}\Sigma I(\sigma_k, \sigma'_k)$$

donne ici

$$p = 3^2 + 1 - 1 = 9.$$

162. L'étude des courbes algébriques tracées sur la surface Σ nous entraînerait trop loin; nous nous bornerons à parler de celles qui sont du plus petit degré.

En dehors des courbes multiples et des courbes unicursales singulières, toute courbe tracée sur une surface représentable point par point sur le champ hyperelliptique est au moins de genre deux, puisqu'elle admet les deux intégrales de première espèce $\int du$ et $\int dv$: les courbes de moindre degré seront donc au moins du quatrième ordre. Si elles sont du quatrième ordre, elles seront planes, car les courbes gauches de degré quatre sont de genre zéro ou un.

Sur la surface Σ existe effectivement une série simplement infinie de courbes planes d'ordre quatre et de genre deux. Soit en effet $\vartheta(u, v)$ la fonction normale impaire d'ordre un et de caractéristique $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$; désignons par λ et μ deux paramètres liés par la relation

$$\vartheta(\lambda, \mu) = 0$$

et considérons sur Σ les courbes représentées par l'équation générale

$$(13) \qquad \vartheta(u+\lambda, v+\mu) = 0.$$

Nous allons montrer que ces courbes, en nombre simplement infini, sont d'ordre quatre.

En effet, dans le champ hyperelliptique, la courbe

$$\vartheta(u+\lambda, v+\mu) = 0$$

a un point simple en $u = 0$, $v = 0$, puisque

$$\vartheta(\lambda, \mu) = 0;$$

la courbe

$$\rho_1 x_1(u, v) + \rho_2 x_2(u, v) + \rho_3 x_3(u, v) + \rho_4 x_4(u, v) = 0$$

a un point double au même point. Donc des *six* points communs à ces deux courbes, *deux* coïncident avec le point $u = 0$, $v = 0$.

En revenant à la surface Σ, on voit que toute courbe (13) tracée sur cette surface est rencontrée par un plan quelconque en $6 - 2 = 4$ points; elle est par suite du *quatrième* degré.

Voici quelques propriétés des courbes (13).

La fonction

$$\vartheta(u+\lambda, v+\mu)\,\vartheta(u-\lambda, v-\mu)$$

est évidemment une fonction thêta d'ordre deux et de caractéristique nulle; elle s'exprime donc en fonction linéaire et homogène de quatre fonctions distinctes de même nature, par exemple de ϑ_0^2, ϑ_1^2, ϑ_2^2, ϑ_3^2. Comme d'ailleurs elle s'annule pour $u = 0$, $v = 0$, ainsi que ϑ_1^2, ϑ_2^2, ϑ_3^2 et que ϑ_0^2 ne s'annule pas, on pourra l'exprimer à l'aide de ϑ_1^2, ϑ_2^2, ϑ_3^2 seulement, et l'on a ainsi

$$(14) \qquad \vartheta(u+\lambda, v+\mu)\,\vartheta(u-\lambda, v-\mu) = \lambda_1 \vartheta_1^2 + \lambda_2 \vartheta_2^2 + \lambda_3 \vartheta_3^2.$$

Observons ici que, si l'on considère la surface de Kummer déjà introduite et définie par les relations (6), le plan

$$\lambda_1 X + \lambda_2 Y + \lambda_3 Z = 0,$$

en vertu de l'équation précédente, est un plan tangent de cette surface (n° **59**) dont le point de contact est défini par les deux équations

$$\Theta(u+\lambda, v+\mu)=0, \qquad \Theta(u-\lambda, v-\mu)=0;$$

c'est donc le point $u=0$, $v=0$, c'est-à-dire le point $X=0$, $Y=0$, $Z=0$, qui est un point singulier de la surface. En d'autres termes, le plan $\lambda_1 X+\lambda_2 Y+\lambda_3 Z=0$ touche le cône $C_2(X, Y, Z)=0$ formé par les tangentes en ce point singulier (n° **159**).

Si nous revenons à Σ, nous voyons que l'équation (14), après multiplication des deux membres par $\Theta_0(u, v)$, peut s'écrire

$$\begin{aligned}&\Theta_0(u, v)\Theta(u+\lambda, v+\mu)\Theta(u-\lambda, v-\mu)\\ &\quad=\lambda_1 x_1(u, v)+\lambda_2 x_2(u, v)+\lambda_3 x_3(u, v).\end{aligned}$$

Le plan $\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+\lambda_3 x_3=0$ coupe donc la surface Σ suivant les deux courbes du quatrième ordre

$$(16) \qquad \Theta(u+\lambda, v+\mu)=0, \qquad \Theta(u-\lambda, v-\mu)=0.$$

Le facteur $\Theta_0(u, v)$ ne donne que l'origine des coordonnées (n° **128**). Les deux courbes (16) sont symétriques l'une de l'autre par rapport à l'origine, car on passe de l'une à l'autre en changeant u et v en $-u$, $-v$ (n° **159**). Le plan $\lambda_1 x+\lambda_2 y+\lambda_3 z=0$ enveloppe le cône $C_2(x, y, z)=0$ d'après ce qui précède.

En d'autres termes :

Les plans menés par le centre de Σ, tangentiellement au cône qui a pour sommet ce point et pour base la conique située sur la surface coupent Σ suivant deux courbes du quatrième ordre.

Ces deux courbes ont le centre (qui est un point quadruple de Σ) pour point double; on démontre sans difficulté qu'elles ont toutes deux pour asymptotes les trois droites suivant lesquelles leur plan coupe les trois plans des coordonnées cartésiennes, et qu'elles sont osculatrices entre elles aux points à l'infini sur ces asymptotes, etc.

Pour six positions du plan sécant, correspondant aux six plans sin-

guliers de la surface de Kummer passant par le point $u = 0$, $v = 0$, les deux courbes du quatrième ordre coïncident [1] : trois des plans sécants ainsi définis sont les plans de coordonnées $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, et les quartiques se décomposent en droites; les trois autres plans touchent Σ le long d'une quartique de genre deux proprement dite.

Il serait aisé de déduire de ces propositions un mode de génération de la surface Σ par des quartiques planes; sans insister sur ce point, nous nous bornerons à faire observer que toutes les quartiques (13) sont des courbes γ et ont par suite les mêmes modules. Géométriquement on peut donner de cette dernière propriété une démonstration identique à celle du n° **60**, basée sur la fixité des rapports anharmoniques des six droites suivant lesquelles un plan mobile, tangent à un cône du second ordre ($C_2 = 0$), est coupé par six plans fixes tangents au même cône.

Enfin il y a lieu de remarquer que les propriétés générales des courbes γ passant par un point fixe s'appliquent à nos quartiques.

165. On obtient une seconde surface du huitième ordre, analogue à la précédente, mais un peu plus générale, de la manière suivante :

Désignons par $\vartheta_1(u, v)$; $\vartheta_2(u, v)$; $\vartheta_3(u, v)$; $\vartheta_4(u, v)$; $\vartheta_5(u, v)$; $\vartheta_6(u, v)$ les six fonctions thêta normales d'ordre un qui s'annulent pour $u = 0$, $v = 0$; ce seront les six fonctions impaires, ayant pour symboles respectifs

$$12', \quad 13', \quad 41', \quad 14', \quad 21', \quad 31'.$$

Soit toujours $\vartheta_0(u, v)$ la fonction d'ordre un et de caractéristique nulle, de symbole $44'$. Considérons la surface S définie par les équations

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \vartheta_0 \vartheta_1^2, \qquad x_2 = \vartheta_0 \vartheta_2^2, \qquad x_3 = \vartheta_0 \vartheta_3^2, \\ \qquad\qquad x_4 = \vartheta_1 \vartheta_2 \vartheta_3 + \rho \vartheta_4 \vartheta_5 \vartheta_6, \end{array} \right.$$

où ρ est une constante quelconque (pour $\rho = 0$ on a la surface Σ). Les

---

[1] L'équation de ces six plans est évidemment $B_3^2 - C_2 A_2^2 = 0$.

quatre fonctions x_1, x_2, x_3, x_4 sont d'ordre trois et de caractéristique nulle, comme on le voit aisément; les trois premières sont paires et la dernière est impaire.

Ces fonctions s'annulent simultanément :

1° Pour les six solutions communes aux équations

$$\Theta_0(u, v) = 0, \qquad \Theta_1\Theta_2\Theta_3 + \rho\Theta_4\Theta_5\Theta_6 = 0;$$

2° Pour le système $u = 0$, $v = 0$; de plus, le point $u = 0$, $v = 0$ est un point double, au moins, pour chacune des courbes du champ hyperelliptique $x_j(u, v) = 0$; $(j = 1, 2, 3, 4)$.

Il en résulte que le degré de S est égal à

$$2.3^2 - 6 - 4 = 8.$$

Cette surface, en coordonnées cartésiennes, a pour centre le point $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, qui est un point quadruple (de première catégorie). Examinons maintenant en quelques mots rapides les courbes remarquables tracées sur S, et d'abord les courbes unicursales singulières.

Les six solutions communes aux deux équations

$$\Theta_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \Theta_1\Theta_2\Theta_3 + \rho\Theta_4\Theta_5\Theta_6$$

sont deux à deux égales et de signes contraires; soient u_0, v_0 et $-u_0$, $-v_0$ deux d'entre elles. Donnons à u, v dans les fonctions $x_j(u, v)$ les valeurs $u_0 + \varepsilon$, $v_0 + \eta$, ε et η étant très petits, il vient

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_1(A\varepsilon + B\eta) + \ldots,\\
x_2 &= a_2(A\varepsilon + B\eta) + \ldots,\\
x_3 &= a_3(A\varepsilon + B\eta) + \ldots,\\
x_4 &= A_4\varepsilon \quad + B_4\eta + \ldots,
\end{aligned}$$

les a, A, B étant des constantes et les termes négligés étant du second ordre au moins en ε et η.

Quand ε et η varient, le point ainsi défini décrit la droite

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \frac{x_3}{a_3}.$$

La droite analogue qui correspond aux valeurs $-u_0$, $-v_0$ des paramètres coïncide avec la précédente, car dans le calcul ci-dessus a_1, a_2, a_3 sont les valeurs que prennent les fonctions paires $\mathfrak{F}_1^2$, $\mathfrak{F}_2^2$, $\mathfrak{F}_3^2$ pour $u = u_0$, $v = v_0$.

En d'autres termes, les six droites (unicursales singulières) se réduiront à trois, passant par le centre de la surface et dont chacune sera une ligne double de S. Nous avons déjà rencontré le même fait pour la surface Σ.

Au système $u = 0$, $v = 0$ correspond sur S une courbe unicursale singulière qui est une conique, située dans le plan $x_4 = 0$ (n° **160**); l'équation de cette conique, ou plutôt celle du cône qui la contient et qui a pour sommet le centre de S, est $C_2(x_1, x_2, x_3) = 0$, comme dans le cas de la surface Σ, car l'équation cherchée ne dépend que des valeurs que prennent les fonctions x_1, x_2, x_3 pour $u = \varepsilon$, $v = \eta$, et ces fonctions sont les mêmes pour les surfaces S et Σ.

On voit également, comme plus haut, que les plans tangents au cône $C_2 = 0$ coupent S suivant deux courbes γ, du quatrième ordre, symétriques par rapport au centre, et dont les équations sont de la forme

$$\mathfrak{F}(u + \lambda, v + \mu) = 0, \qquad \mathfrak{F}(u - \lambda, v - \mu) = 0,$$

λ et μ étant deux paramètres liés par la relation $\mathfrak{F}(\lambda, \mu) = 0$.

Toutes ces courbes ont pour point double le centre de S.

On démontre ensuite sans difficulté que, parmi les plans tangents au cône $C_2 = 0$, il en est six qui touchent la surface S suivant une courbe du quatrième ordre [1]. Les trois faces du trièdre formé par les droites doubles trouvées plus haut, touchent également le cône, et coupent chacune S suivant une conique, qui est une ligne double de cette surface.

Enfin le plan $x_4 = 0$ coupe S suivant la conique qui correspond au système de valeurs $u = 0$, $v = 0$, et suivant une courbe du troisième ordre qui est également une ligne double de la surface.

En résumé, la surface S a pour lignes doubles trois droites, trois

---

[1] Parmi ces plans figurent les plans de coordonnées $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

coniques et une cubique; le genre des sections planes est ainsi égal à $\frac{1}{2}.7.6 - 12 = 9$, comme on le savait *a priori*.

La surface adjointe du quatrième ordre se décompose en quatre plans, qui sont les faces du trièdre formé par les droites doubles et le plan $x_1 = 0$.

164. Nous nous bornerons enfin à signaler une *troisième surface hyperelliptique d'ordre huit*, qu'on déduit de Σ en remplaçant x, y, z par $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{y}$, $\frac{1}{z}$; elle a pour équation

$$C_4 + 2xyz B_3 + A_1^2 x^2 y^2 z^2 = 0,$$

étant posé

$$C_4 = a_1^2 y^2 z^2 + a_2^2 x^2 z^2 + a_3^2 x^2 y^2 - 2xyz(a_1 a_2 z + a_1 a_3 y + a_2 a_3 x),$$

$$B_3 = -a_2 a_3 x(z^2 - y^2) + a_1 a_3 y(x^2 + z^2) - a_1 a_2 z(x^2 + y^2) + \lambda xyz,$$

$$A_1 = a_1 x - a_2 y - a_3 z.$$

QUATRIÈME PARTIE.

SURFACES REPRÉSENTABLES POINT PAR POINT SUR LA SURFACE DE KUMMER.

Généralités.

165. Nous avons admis jusqu'ici, dans l'étude des surfaces hyperelliptiques générales, qu'à un point de la surface ne correspond, aux multiples près des périodes, qu'un seul couple d'arguments u, v.

Supposons maintenant qu'à un point d'une surface $\mathfrak{T}$ dont les coordonnées cartésiennes x, y, z s'expriment en fonction quadruplement périodique uniforme de deux paramètres u, v, correspondent *deux couples* d'arguments u, v et u', v'. Nous allons démontrer que la sur-

face $\mathfrak{T}$ est représentable point par point sur une surface de Kummer.

En effet, considérons, en chaque point x, y, z de $\mathfrak{T}$, la somme $du + du'$: elle peut se mettre sous la forme $M\,dx + N\,dy$, M et N étant rationnels en x, y, z, car x et y étant les variables indépendantes, chacune des deux fonctions $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial x}$ et $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u'}{\partial y}$ est une fonction rationnelle de x, y, z en chaque point de $\mathfrak{T}$, puisqu'elle n'a qu'une seule valeur en ce point.

Si maintenant, dans $M\,dx + N\,dy$, on remplace x, y, z par leurs valeurs en fonction quadruplement périodique de u, v, il vient

$$du + du' = A(u, v)\,du + B(u, v)\,dv,$$

A et B étant des fonctions quadruplement périodiques uniformes.

De même on aurait

$$dv + dv' = A_1(u, v)\,du + B_1(u, v)\,dv.$$

Les deux intégrales $\int (du + du')$ et $\int (dv + dv')$ restent évidemment finies sur la surface $\mathfrak{T}$; or l'intégrale $\int A(u, v)\,du + B(u, v)\,dv$ ne peut demeurer finie que si les fonctions quadruplement périodiques A et B se réduisent à des constantes, et de même les fonctions A_1 et B_1.

On a ainsi

$$(1)\qquad \begin{cases} du + du' = \alpha\,du + \beta\,dv, \\ dv + dv' = \alpha_1\,du + \beta_1\,dv, \end{cases}$$

α, β, α_1, β_1 étant des constantes.

Permutant u et u', v et v' dans ces relations, on trouve les nouvelles équations

$$(2)\qquad \begin{cases} \alpha\,(du - du') + \beta\,(dv - dv') = 0, \\ \alpha_1(du - du') + \beta_1(dv - dv') = 0. \end{cases}$$

Deux cas sont à distinguer :

I. Si l'on a

$$du' = du \qquad \text{et} \qquad dv' = dv,$$

les deux relations (2) sont satisfaites. Mais on en conclut $u' = u + \gamma$, $v' = v + \gamma_1$; γ et γ_1 étant des constantes, et par suite les coordonnées x, y, z, considérées comme des fonctions quadruplement périodiques de u, v, admettent le couple de périodes γ, γ_1. Le système d'arguments u', v' n'est donc pas distinct (aux périodes près) du système u, v.

II. Si l'on n'a pas simultanément

$$du = du' \qquad \text{et} \qquad dv = dv',$$

les relations (2) montrent que le déterminant $\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1$ est nul.

Distinguons encore deux cas.

1° Si α, β, α_1, β_1 sont tous nuls, il reste dans (1)

$$du + du' = 0, \qquad dv + dv' = 0;$$

d'où l'on tire

$$u + u' = \gamma, \qquad v + v' = \gamma_1.$$

Posons maintenant

$$u = U + \tfrac{1}{2}\gamma, \qquad v = V + \tfrac{1}{2}\gamma_1,$$
$$u' = U' + \tfrac{1}{2}\gamma, \qquad v' = V' + \tfrac{1}{2}\gamma_1;$$

il vient

$$U + U' = 0, \qquad V + V' = 0.$$

On voit ainsi que les coordonnées x, y, z, considérées comme fonctions quadruplement périodiques de U et V ne changent pas quand on remplace U et V simultanément par $-$ U et $-$ V; ce sont donc des fonctions *paires* de U, V.

2° Supposons que l'une au moins des quantités α, β, α_1, β_1; α_1, par exemple, ne soit pas nulle.

On déduit des équations (1), en tenant compte de la condition $\alpha\beta_1 - \beta\alpha_1 = 0$,

$$(\alpha_1\, du - \alpha\, dv) + (\alpha_1\, du' - \alpha\, dv') = 0;$$

d'où

$$(3) \qquad (\alpha_1 u - \alpha v) + (\alpha_1 u' - \alpha v') = \gamma.$$

La seconde relation (2) donne d'ailleurs

$$(4) \qquad (\alpha_1 u + \beta_1 v) - (\alpha_1 u' + \beta_1 v') = \gamma_1.$$

Prenons maintenant pour variables, à la place de u et v, les arguments U et V ainsi définis

$$U = \alpha_1 u - \alpha v - \tfrac{1}{2}\gamma,$$
$$V = \alpha_1 u + \beta_1 v.$$

Les relations (3) et (4) montrent que, à un point de $\mathfrak{T}$, correspondront les deux systèmes d'arguments

$$U, V \text{ et } -U, V + \gamma_1.$$

En ce cas, les fonctions quadruplement périodiques considérées se ramènent aux fonctions elliptiques.

Soit en effet $F(U, V)$ l'une quelconque des coordonnées x, y, z d'un point de $\mathfrak{T}$; on a, d'après ce qui précède, pour toutes les valeurs de U, V,

$$(5) \qquad F(U, V) = F(-U, V + \gamma_1).$$

On en conclut, en changeant encore une fois U, V en $-U$, $V + \gamma_1$,

$$F(U, V) = F(U, V + 2\gamma_1),$$

$2\gamma_1$ est donc une période par rapport à V seulement.

Soient maintenant ω et ω' un couple quelconque de périodes simultanées de U, V : changeons dans (5) U et V en $U + \omega$, $V + \omega'$; il vient successivement, par des transformations évidentes,

$$\begin{aligned} F(U, V) = F(U + \omega, V + \omega') &= F(-U - \omega, V + \omega' + \gamma_1) \\ &= F(-U, V + 2\omega' + \gamma_1) \\ &= F(U, V + 2\omega' + 2\gamma_1) \\ &= F(U, V + 2\omega'). \end{aligned}$$

Cette dernière relation montre que $2\omega'$ est une période par rapport

à V seul; et, par suite, puisque $(2\omega, 2\omega')$ est un couple de périodes simultanées, que 2ω est une période par rapport à U seul.

Il en résulte évidemment que $F(U, V)$ est une fonction doublement périodique de U et doublement périodique de V.

166. Résumant toute cette analyse, on voit que, si l'on reste dans le champ hyperelliptique proprement dit, *toute surface* $\mathfrak{T}$, *telle qu'à un de ses points correspondent deux points du champ, peut*, après un changement de variables, *être représentée par des équations de la forme*

$$x = F_1(u, v), \qquad y = F_2(u, v), \qquad z = F_3(u, v),$$

où F_1, F_2, F_3 sont des fonctions quadruplement périodiques *paires* de u, v, c'est-à-dire ne changeant pas quand on remplace u, v par $-u$, $-v$.

En d'autres termes :

La surface $\mathfrak{T}$ *est représentable point par point sur la surface de Kummer.*

167. Les coordonnées homogènes x_1, x_2, x_3, x_4 d'un point de la surface $\mathfrak{T}$ peuvent être mises sous une forme remarquable.

Si l'on se reporte en effet au théorème de M. Appell, rappelé au n° **1**, on voit qu'on peut écrire (en négligeant le facteur de proportionnalité)

$$x_1 = \theta_1(u, v), \qquad x_2 = \theta_2(u, v),$$
$$x_3 = \theta_3(u, v), \qquad x_4 = \theta_4(u, v);$$

$\theta_1(u, v), \ldots, \theta_4(u, v)$ étant des fonctions thêta de même ordre et de mêmes multiplicateurs.

Pour que la fonction $\frac{x_1}{x_4}$ soit paire, il faut qu'on ait

$$\frac{\theta_1(u, v)}{\theta_4(u, v)} = \frac{\theta_1(-u, -v)}{\theta_4(-u, -v)};$$

d'où l'on déduit aisément que le quotient $\frac{\theta_1(-u,-v)}{\theta_1(u,v)}$ doit être entier, et par suite (n° **10**) il faut que $\theta_1(u,v)$ soit une fonction paire ou impaire, ou qu'elle le devienne quand on la multiplie par $e^{-\frac{p'}{2}u-\frac{q'}{2}v}$, p' et q' étant des nombres entiers.

Désignons par $\Theta_1(u,v)$ la fonction paire ou impaire

$$\theta_1(u,v)\,e^{-\frac{p'}{2}u-\frac{q'}{2}v},$$

le raisonnement fait au n° **14** montre que $\Theta_1(u,v)$ est une *fonction normale*, de caractéristique quelconque.

Les quotients $\frac{\theta_2}{\theta_1}, \frac{\theta_3}{\theta_1}, \frac{\theta_4}{\theta_1}$ étant des fonctions quadruplement périodiques paires, les trois fonctions

$$\Theta_j = e^{-\frac{p'}{2}u-\frac{q'}{2}v}\theta_j(u,v), \qquad (j=2,3,4),$$

qui sont des fonctions thêta, seront des fonctions normales, de même ordre et de même caractéristique que $\Theta_1(u,v)$, et seront paires ou impaires avec Θ_1.

En d'autres termes :

Les coordonnées homogènes d'un point de $\mathfrak{T}$ sont proportionnelles à quatre fonctions thêta normales, de même ordre et de même caractéristique, simultanément paires ou impaires.

On peut dire aussi que toute surface $\mathfrak{T}$ correspond point par point à une surface de Kummer K, par les relations

$$x_j = S_j(X_1, X_2, X_3, X_4) \qquad (j=1,2,3,4),$$

en désignant par x_j les coordonnées d'un point de $\mathfrak{T}$ et par X_j celles du point correspondant de K.

Les fonctions S_j, égalées à zéro, représentent des surfaces liées d'une manière remarquable à la surface de Kummer; d'après la théorie

générale des courbes tracées sur cette surface, cinq cas sont à distinguer :

1° Les coordonnées $x_j(u, v)$ sont d'ordre impair, $2\rho + 1$, et s'annulent pour six demi-périodes : les surfaces $S_j = 0$ sont d'ordre $\rho + 1$ et passent par une même conique de K.

2° Les coordonnées $x_j(u, v)$ sont d'ordre impair, $2\rho + 1$, et s'annulent pour dix demi-périodes : les surfaces $S_j = 0$ sont d'ordre $\rho + 2$, et passent par trois mêmes coniques de K, ayant en commun un point double de K.

3° Les coordonnées $x_j(u, v)$ sont paires, d'ordre pair, 2ρ, et de caractéristique nulle : les surfaces S_j sont d'ordre ρ et n'ont en commun aucune courbe située sur K.

4° Les coordonnées $x_j(u, v)$ sont impaires, d'ordre pair 2ρ, et de caractéristique nulle : les surfaces S_j sont d'ordre $\rho + 2$ et passent par quatre mêmes coniques de K, formant un groupe de Rosenhain.

5° Les coordonnées $x_j(u, v)$ sont d'ordre pair, 2ρ, et de caractéristique non nulle; les surfaces $S_j = 0$ sont d'ordre $\rho + 1$ et passent par deux mêmes coniques de K.

168. Ces principes étant établis, il est aisé, en répétant les raisonnements faits au Chapitre III de la troisième Partie, d'établir la théorie générale des surfaces $\mathfrak{T}$.

Nous nous bornerons à énoncer les résultats principaux.

Toute surface $\mathfrak{T}$, *d'ordre* n, *admet une surface adjointe d'ordre* $n - 4$ (n° **102**); cette surface a pour ligne multiple d'ordre $l - 1$ toute ligne multiple d'ordre l et pour point multiple d'ordre $l - 2$ (au moins) tout point multiple d'ordre l de $\mathfrak{T}$. *Elle coupe* $\mathfrak{T}$, *en dehors des lignes multiples, suivant les courbes unicursales singulières de* $\mathfrak{T}$, *celles qui correspondent à des demi-périodes pouvant toutefois être exceptées* (n° **107**).

La théorie des courbes tracées sur la surface de Kummer, exposée au Chapitre IX de la deuxième Partie, s'applique évidemment sans modification aux surfaces $\mathfrak{T}$, du moins pour les propriétés qui restent invariables dans les transformations birationnelles.

Le nombre des surfaces d'ordre $n - 3$, *linéairement distinctes,*

adjointes à $\mathfrak{T}$, *est égal à* $p+1$, p *étant le genre des sections planes de* $\mathfrak{T}$.

Le nombre des surfaces d'ordre $n+q-4$, *linéairement distinctes, adjointes à* $\mathfrak{T}$, *est égal à*

$$\tfrac{1}{2}q(q-1)n+q(p-1)+2+\tfrac{1}{6}(q-1)(q-2)(q-3).$$

Cette formule ne diffère de la formule analogue, relative aux surfaces hyperelliptiques générales, que par le terme additif $+2$ [1].

Si les quatre fonctions coordonnées $x_j(u,v)$ sont des fonctions d'ordre h, ayant en commun des singularités $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ en des points $u_1, v_1, \ldots, u_k, v_k$, *les courbes découpées sur* $\mathfrak{T}$ *par les surfaces adjointes d'ordre* $n+q-4$ *forment une série linéaire*

$$\tfrac{1}{2}q(q-1)n+q(p-1)+1$$

fois infinie, et ayant pour équation générale

$$\lambda_1\theta_1(u,v)+\lambda_2\theta_2(u,v)+\ldots=0,$$

les $\theta(u,v)$ *étant les fonctions thêta normales d'ordre* hq, *linéairement distinctes, de même caractéristique que les fonctions* $x_j^q(u,v)$, *et paires ou impaires selon que ces dernières sont paires ou impaires; de plus, les fonctions* $\theta(u,v)$ *ont en chaque point* u_k, v_k *la singularité adjointe de la singularité composée* $(q\sigma_k)$.

169. *Remarque.* — Il peut arriver que les fonctions $\theta(u,v)$ aient en u_k, v_k une singularité d'ordre plus élevé que la singularité adjointe $(q\sigma_k)'$, en raison de la condition particulière qui leur est imposée d'être paires ou impaires. Par exemple, si ces fonctions sont des fonctions paires, de caractéristique nulle, et si la singularité σ_k consiste en un point double correspondant à une demi-période, — $(0,0)$ par exemple, — la singularité $q\sigma_k$ sera un point multiple d'ordre $2q$, et la

[1] L'existence du terme $+2$ tient à ce que les intégrales $\int du$ et $\int dv$ ne sont pas des intégrales abéliennes le long de toute courbe tracée sur $\mathfrak{T}$.

singularité $(q\sigma_k)'$ un point d'ordre $2q-1$, correspondant à la même demi-période; mais une fonction paire ne peut avoir au point $(0, 0)$ qu'un point multiple d'ordre pair; les fonctions $\theta(u, v)$ auront ainsi, en ce point, un point multiple d'ordre $2q$, et par suite y seront douées de la singularité $(q\sigma_k)$ et non de la singularité adjointe $(q\sigma_k)'$. La proposition énoncée plus haut n'en subsiste pas moins, si l'on considère comme douée *a fortiori* de la singularité $(q\sigma_k)'$ toute fonction qui présente en u_k, v_k une singularité plus élevée que $(q\sigma_k)'$.

Dans cet énoncé voici ce que nous entendons par singularité plus élevée que $(q\sigma_k)'$. Soient $\Theta_0(u, v)$ une fonction quelconque, ayant en u_k, v_k la singularité $(q\sigma_k)$, et $\Theta(u, v)$ une fonction quelconque ayant la singularité adjointe $(q\sigma_k)'$: la fonction $\theta(u, v)$ aura une singularité plus élevée que $(q\sigma_k)'$ si le quotient $\frac{\theta(u, v)}{\Theta(u, v)}$ tend vers zéro quand u, v s'approchent respectivement de u_k, v_k en restant liés par la relation $\Theta_0(u, v) = 0$.

170. On démontre également, comme au n° **155**, que :

Les surfaces adjointes d'ordre $n+q-4$ qui passent par les courbes unicursales singulières, communes à $\mathfrak{T}$ et à la surface adjointe d'ordre $n-4$, découpent sur $\mathfrak{T}$ la série linéaire des courbes comprises dans l'équation

$$\lambda_1\theta_1(u, v) + \lambda_2\theta_2(u, v) + \ldots = 0,$$

où $\theta_1, \theta_2, \ldots$ désignent les fonctions thêta normales d'ordre hq, linéairement distinctes, de même caractéristique que les fonctions $x_j^q(u, v)$, et paires ou impaires en même temps que ces dernières; de plus, les fonctions $\theta_1, \theta_2, \ldots$ ont en chaque point u_k, v_k la singularité composée $(q\sigma_k)$.

Le nombre des surfaces adjointes, linéairement distinctes, dont il est question, est *au moins* égal à

$$\tfrac{1}{2}q(q+1)n - q(p-1) + 2 + \tfrac{1}{6}(q-1)(q-2)(q-3).$$

Il est égal à ce nombre lorsque les singularités $(q\sigma_k)$ sont indépen-

dantes pour les fonctions thêta normales, d'ordre hq, de même caractéristique que les fonctions $x_j^q(u, v)$ et paires ou impaires en même temps que celles-ci.

Ces divers théorèmes donneraient lieu à des applications géométriques analogues à celles qui ont été développées dans le cas des surfaces hyperelliptiques générales, et sur lesquelles nous n'insisterons pas.

Surfaces hyperelliptiques du quatrième ordre.

171. Laissant maintenant de côté l'étude générale des surfaces $\mathfrak{T}$, nous dirons quelques mots de celles qui sont d'ordre minimum, c'est-à-dire d'ordre 4 : il est clair, en effet, que les surfaces $\mathfrak{T}$ sont au moins du quatrième degré, puisqu'elles sont de genre un.

Les surfaces $\mathfrak{T}$, d'ordre quatre, ne peuvent avoir d'autres courbes unicursales singulières que celles qui correspondent à des demi-périodes. En effet (n° **105**), l'intégrale double $\int\int du\,dv$, sur une surface $\mathfrak{T}$, d'ordre n, se met sous la forme

$$\int\int \frac{D(x, y, z)\,dx\,dy}{T_z'}.$$

Nous savons de plus (n° **107**) que la fonction $D(x, y, z)$, d'ordre $n-4$, s'annule en tous les points d'une courbe unicursale singulière qui ne correspond pas à une demi-période. Si $T(x, y, z)$ est d'ordre quatre, $D(x, y, z)$ est une constante non nulle, et par suite il est impossible qu'il existe des courbes unicursales singulières, en dehors de celles qui correspondent à des demi-périodes.

Les quatre fonctions coordonnées $x_j(u, v)$, $(j = 1, 2, 3, 4)$, qui définissent une surface $\mathfrak{T}$ d'ordre quatre, n'ont donc de singularités communes qu'aux seize points $\left(\frac{\mathfrak{P}}{2}, \frac{\mathfrak{P}'}{2}\right)$, en désignant toujours par $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}'$ deux périodes simultanées.

Soient $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{16}$ ces singularités dont plusieurs ne peuvent pas exister; on a, en désignant par h l'ordre des fonctions $x_j(u, v)$,

$$4 = \tfrac{1}{2}[2h^2 - \Sigma_k I(\sigma_k, \sigma_k)];$$

car l'ordre de $\mathfrak{T}$ est évidemment égal à *la moitié* du nombre des solutions non fixes communes à deux équations $x_j(u, v) = 0$, $x_i(u, v) = 0$, puisque ces solutions sont deux à deux égales et de signes contraires, et qu'à deux systèmes u, v; $-u-v$ ne correspond qu'un point de $\mathfrak{T}$.

Les sections planes d'une surface $\mathfrak{T}$ d'ordre quatre sont de genre trois, car la surface $\mathfrak{T}$, qui est de genre un, n'a pas de courbe multiple; par suite, le nombre des surfaces adjointes à $\mathfrak{T}$, d'ordre $n+q-4$, c'est-à-dire d'ordre q, est, d'après la formule du n° **170** (¹), *au moins* égal à

$$2q(q+1) - 2q + 2 + \tfrac{1}{6}(q-1)(q-2)(q-3)$$

ou

$$\tfrac{1}{6}(q+1)(q+2)(q+3).$$

Or le nombre $\frac{1}{6}(q+1)(q+2)(q+3)$ est précisément égal au nombre des surfaces les plus générales d'ordre q linéairement distinctes; il en résulte :

1° Que les surfaces d'ordre q adjointes à une surface $\mathfrak{T}$ d'ordre quatre sont toutes les surfaces d'ordre q de l'espace, ce qui était évident *a priori;*

2° Que les mots *au moins* doivent être supprimés dans l'énoncé ci-dessus, et par suite (n° **170**) que les singularités $(q\sigma_k)$ sont indépendantes pour les fonctions thêta normales de même ordre et de même caractéristique que les fonctions x_j^q, et paires ou impaires en même temps que celles-ci. En particulier, si l'on fait $q=1$, on voit que les singularités communes aux quatre fonctions $x_1(u, v)\, x_2(u, v)$, $x_3(u, v)$, $x_4(u, v)$ sont indépendantes les unes des autres, pour les fonctions thêta normales de même ordre et de même caractéristique que ces quatre fonctions, et paires ou impaires en même temps qu'elles.

Enfin le nombre des surfaces adjointes linéairement distinctes d'ordre un étant égal à quatre, la proposition du n° **170** montre qu'il n'existe pas, en dehors des quatre fonctions $x_j(u, v)$ et de leurs combinaisons linéaires, de fonction thêta de même ordre et de même

(¹) Cette formule donne bien le nombre des surfaces adjointes d'ordre q, puisqu'il n'y a pas de courbes unicursales singulières communes à $\mathfrak{T}$ et à la surface adjointe d'ordre $n-4$.

caractéristique que ces fonctions, paire ou impaire en même temps qu'elles, et douée des mêmes singularités aux seize points $\left(\frac{\Psi}{2}, \frac{\Psi'}{2}\right)$.

172. Il résulte de là qu'on pourra trouver *toutes* les surfaces $\mathfrak{T}$ d'ordre quatre en appliquant la méthode suivante.

Soit h un nombre quelconque; on considérera les fonctions thêta normales $\theta(u, v)$, d'ordre h, paires (ou impaires) ayant une caractéristique donnée.

Désignons par N le nombre des fonctions thêta considérées, linéairement distinctes; une singularité σ_k en un des seize points $\left(\frac{\Psi}{2}, \frac{\Psi'}{2}\right)$ équivaut pour ces fonctions à c_k conditions : on formera les fonctions $\theta(u, v)$ qui ont en chacun des seize points précédents des singularités $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{16}$ choisies arbitrairement, mais de telle sorte cependant que l'on ait

$$(6) \qquad 4 = N - \Sigma c_k.$$

On aura donc ainsi formé quatre fonctions $\theta(u, v)$ linéairement distinctes qui sont les fonctions coordonnées $x_j(u, v)$ d'une surface $\mathfrak{T}$, dont le degré n est donné par la relation

$$(7) \qquad n = \tfrac{1}{2}\left|2h^2 - \Sigma_k I(\sigma_k, \sigma_k)\right|.$$

Les singularités σ_k devront être choisies de telle sorte que $n = 4$. Toutefois il conviendra de s'assurer que les quatre fonctions $\theta(u, v)$ trouvées ne sont pas divisibles par une même fonction thêta, et qu'à un point de $\mathfrak{T}$ ne correspondent pas d'autres couples d'arguments que u, v et $-u, -v$.

Voici des applications de cette méthode à chacun des cinq cas considérés au n° **167**.

173. I. Les fonctions $\theta(u, v)$ sont d'ordre $2\rho + 1$, paires par exemple, et s'annulent pour six mêmes demi-périodes, $\frac{\Psi_i}{2}, \frac{\Psi'_i}{2}$.

Le nombre de ces fonctions, linéairement distinctes, est égal (n^{os} **5**, **7**) à

$$2\rho^2 + 2\rho + 1.$$

Si on les assujettit à avoir un point multiple d'ordre $2k$ pour une des dix demi-périodes autres que $\frac{\mathfrak{P}_i}{2}$, $\frac{\mathfrak{P}'_i}{2}$, le point $(0, 0)$ par exemple, on trouve aisément le nombre de conditions auxquelles équivaut cette singularité. En effet, les développements des fonctions paires $\theta(u, v)$, suivant les puissances croissantes de u, v, ne contient que des termes d'ordre pair; si l'on annule les coefficients de ces termes jusqu'à l'ordre $2k$ exclusivement, on obtient un nombre de conditions égal à

$$1 + 3 + \ldots + (2k - 1), \quad \text{c'est-à-dire} \quad k^2.$$

Si l'on assujettit les fonctions $\theta(u, v)$ à avoir un point multiple d'ordre $2k + 1$ pour une des six demi-périodes primitives, on trouve de même un nombre de conditions égal à

$$2 + 4 + \ldots + 2k = k(k + 1).$$

Par suite, pour les fonctions $\theta(u, v)$ douées de points multiples ordinaires, correspondant aux seize demi-périodes, et d'ordres

$$2k_1, \quad 2k_2, \quad \ldots, \quad 2k_{10}, \quad 2k'_1 + 1, \quad 2k'_2 + 1, \quad \ldots, \quad 2k'_6 + 1,$$

les relations (6) et (7) deviennent

$$\begin{aligned} 4 &= 2\rho^2 + 2\rho + 1 - (k_1^2 + k_2^2 + \ldots + k_{10}^2) \\ &\quad - [k'_1(k'_1 + 1) + \ldots + k'_6(k'_6 + 1)], \\ 4 &= \tfrac{1}{2}[2(2\rho + 1)^2 - 4(k_1^2 + \ldots + k_{10}^2) \\ &\quad - (2k'_1 + 1)^2 - \ldots - (2k'_6 + 1)^2]. \end{aligned}$$

On vérifie immédiatement que *ces deux relations ne diffèrent pas l'une de l'autre*, et chacune d'elles peut s'écrire

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} &8\rho^2 + 8\rho - 6 \\ &\quad = 4k_1^2 + 4k_2^2 + \ldots + 4k_{10}^2 + (2k'_1 + 1)^2 + \ldots + (2k'_6 + 1)^2. \end{aligned} \right.$$

On arrive ainsi à ce résultat remarquable que les surfaces $\mathfrak{T}$ du quatrième ordre cherchées correspondent aux décompositions du

nombre $8\rho^2 + 8\rho - 6$, en dix carrés pairs et en six carrés impairs, $2\rho + 1$ étant l'ordre des fonctions coordonnées.

Voici un exemple :

Pour $\rho = 1$, on a

$$8\rho^2 + 8\rho - 6 = 10.$$

Les décompositions du nombre 10 en carrés suivant la formule (8) se réduisent à une seule

$$10 = 4 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

Les fonctions $\theta(u, v)$ sont alors des fonctions thêta paires, d'ordre trois, de caractéristique nulle, s'annulant pour six demi-périodes, et ayant un point double pour une autre demi-période.

Géométriquement, la surface $\mathfrak{T}$ correspondante est définie par des équations de la forme

$$x_j = S_j(X_1, X_2, X_3, X_4), \tag{9}$$

où X_1, X_2, X_3, X_4 désignent les coordonnées d'un point d'une surface de Kummer, K. Les surfaces $S_j = 0$ sont ici des quadriques, passant par une des coniques singulières de K et par un point double situé en dehors de cette conique. La transformation ainsi obtenue est une transformation par rayons vecteurs réciproques de la surface K, si l'on suppose que la conique considérée sur K soit le cercle à l'infini et que le pôle soit placé en un des points doubles à distance finie.

L'étude de la surface du quatrième degré trouvée n'offre donc aucune difficulté.

174. II. Les fonctions $\theta(u, v)$, d'ordre $2\rho + 1$, s'annulent pour dix demi-périodes. Celles d'entre elles qui sont linéairement distinctes sont (n^{os} **3**, **7**) en nombre égal à

$$2\rho^2 + 2\rho.$$

On démontre comme tout à l'heure qu'on obtiendra une surface $\mathfrak{T}$ d'ordre quatre, en assujettissant ces fonctions à avoir des points mul-

tiples d'ordres $(2k_1+1)$, $(2k_2+1)$, ..., $(2k_{10}+1)$ pour chacune des dix demi-périodes primitives et des points multiples d'ordres $2k'_1$, $2k'_2$, ..., $2k'_6$ pour chacune des six autres demi-périodes, les nombres k et k' devant vérifier la relation unique

$$8\rho^2+8\rho-6=(2k_1+1)^2+\ldots+(2k_{10}+1)^2+4k'^2_1+\ldots+4k'^2_6.$$

Exemple. — Pour $\rho=1$, $8\rho^2+8\rho-6$ est égal à dix et il n'y a qu'une décomposition possible

$$10=1+1+1+\ldots+1.$$

Les fonctions $\theta(u,v)$ sont alors des fonctions d'ordre trois s'annulant pour dix demi-périodes.

Dans les relations de la forme (9) qui définissent $\mathfrak{T}$, les surfaces $S_j=0$ sont des surfaces cubiques passant par trois coniques de K ayant en commun un point double de cette dernière surface. Nous reviendrons plus loin sur la surface $\mathfrak{T}$ ainsi obtenue.

175. III. Les fonctions $\theta(u,v)$ sont paires, de caractéristique nulle et d'ordre 2ρ; le nombre de celles qui sont linéairement distinctes est égal (n° 4) à

$$2\rho^2+2.$$

On obtient une surface $\mathfrak{T}$ d'ordre quatre en assujettissant ces fonctions à avoir, pour les demi-périodes, des points multiples d'ordres $2k_1$, $2k_2$, ..., $2k_{16}$, les nombres k vérifiant la relation unique

$$2\rho^2-2=k_1^2+k_2^2+\ldots+k_{16}^2.$$

Exemples. — Pour $\rho=2$, on a

$$2\rho^2-2=6.$$

Il y a deux décompositions du nombre six en moins de seize carrés

1° $\qquad 6=2^2+1+1,$

2° $\qquad 6=1+1+1+1+1+1.$

On voit sans difficulté que la surface $\mathfrak{T}$ qui correspond à la première décomposition est définie par des équations de la forme (9), où les surfaces $S_j = 0$ sont des cônes du second ordre qui ont pour sommet commun un point double de K et passent en outre par deux autres points doubles de cette surface. Il est clair qu'à un point de $\mathfrak{T}$ correspondent dès lors *deux* points de K, situés sur une même droite issue du point double qui est le sommet des cônes $S_j = 0$, et par suite $\mathfrak{T}$ est non pas du *quatrième*, mais du *second* degré.

Pour la surface $\mathfrak{T}$ qui correspond à la seconde décomposition, les surfaces $S_j = 0$ sont des quadriques passant par six points singuliers de K. Parmi ces six points, cinq ne peuvent être dans un même plan singulier de K, parce que les fonctions coordonnées $x_j(u, v)$ seraient alors divisibles par la fonction $\mathfrak{Z}$ du premier ordre correspondant à ce plan singulier.

176. IV. Les fonctions $\theta(u, v)$ sont impaires, de caractéristique nulle, d'ordre 2ρ, elles s'annulent pour chacune des seize demi-périodes; le nombre de celles qui sont linéairement distinctes est $2\rho^2 - 2$ (n° **4**).

On obtient une surface $\mathfrak{T}$ d'ordre quatre en assujettissant ces fonctions à avoir, pour les demi-périodes, des points multiples d'ordres $(2k_1 + 1), (2k_2 + 1), \ldots, (2k_{16} + 1)$; les nombres k vérifiant la relation unique

$$8\rho^2 - 8 = (2k_1 + 1)^2 + (2k_2 + 1)^2 + \ldots + (2k_{16} + 1)^2.$$

Exemple. — Pour $\rho = 2$, $8\rho^2 - 8$ est égal à 24; il n'y a qu'une décomposition du nombre 24 en seize carrés impairs

$$24 = 9 + 1 + 1 + \ldots + 1.$$

Les quatre fonctions $x_j(u, v)$ relatives à la surface $\mathfrak{T}$ correspondante sont des fonctions thêta normales d'ordre quatre appartenant à la famille singulière; les courbes $x_j(u, v) = 0$ sur la surface de Kummer ont un point triple en un des seize points singuliers; ce sont donc (n° **78**) les courbes de contact de surfaces de Steiner inscrites à K.

Nous retrouverons également plus loin cette surface $\mathfrak{T}$.

177. V. Les fonctions $\theta(u, v)$ sont d'ordre 2ρ et de caractéristique non nulle. Elles s'annulent pour huit demi-périodes; le nombre de celles qui sont linéairement distinctes est égal à $2\rho^2$.

On obtient une surface $\mathfrak{T}$ d'ordre quatre en assujettissant ces fonctions à avoir, pour chacune des demi-périodes primitives, des points multiples d'ordres $2k_1 + 1$, $2k_2 + 1$, ..., $2k_8 + 1$ et, pour chacune des huit autres demi-périodes, des points multiples d'ordres $2k'_1$, ..., $2k'_8$, les nombres k, k' vérifiant la relation unique

$$8\rho^2 - 8 = (2k_1 + 1)^2 + \ldots + (2k_8 + 1)^2 + 4k'^2_1 + \ldots + 4k'^2_8.$$

Exemple. — Pour $\rho = 2$, $8\rho^2 - 8$ est égal à 24; il y a plusieurs décompositions du nombre 24 en huit carrés pairs et huit carrés impairs; considérons par exemple la suivante

$$24 = 4 + 4 + 4 + 4 + 1 + 1 + \ldots + 1.$$

Pour la surface $\mathfrak{T}$ qui correspond à cette décomposition les surfaces $S_j = 0$ sont des surfaces du troisième ordre, passant par deux coniques de K, et en outre par quatre points doubles de cette surface. Les quatre derniers points doubles doivent être distincts de ceux qui sont situés sur les deux coniques considérées, mais peuvent cependant coïncider avec l'un ou l'autre des points doubles communs aux deux coniques.

178. La théorie précédente montre qu'on peut obtenir des surfaces $\mathfrak{T}$ du quatrième ordre, quel que soit l'ordre fixé *a priori*, des fonctions coordonnées correspondantes; l'étude générale des surfaces ainsi définies serait sans doute fort intéressante, mais nous ne l'aborderons pas ici, nous contentant d'examiner une des surfaces particulières indiquées plus haut.

Nous nous bornerons à faire observer qu'on peut, pour des valeurs différentes de l'ordre fixé, retrouver la même surface [1]; c'est ainsi que la surface de Kummer se retrouve, comme on le voit aisé-

[1] Le raisonnement fait en note au n° 105 ne s'applique pas aux surfaces $\mathfrak{T}$, puisque les différentielles du et dv ne sont pas abéliennes sur ces surfaces.

ment, pour diverses valeurs simples de l'ordre. A chaque mode nouveau de représentation de cette surface correspond évidemment une transformation birationnelle de la surface en elle-même, et réciproquement. On voit par là que l'étude des surfaces ici examinées présente un réel intérêt; nous aurons sans doute occasion d'y revenir [1].

Étude d'une surface hyperelliptique du quatrième ordre.

179. Soit $\mathfrak{R}$ la surface du quatrième ordre pour laquelle les fonctions coordonnées $x_j(u, v)$ sont les quatre fonctions thêta impaires, linéairement distinctes d'ordre trois et de caractéristique nulle (n° **174**). Ces fonctions s'annulant simultanément pour dix demi-périodes, la surface $\mathfrak{R}$ a dix droites, qui jouent le rôle de courbes unicursales singulières. Les points qui correspondent sur $\mathfrak{R}$ aux six autres demi-périodes sont évidemment des points doubles de la surface (n° **15**).

Étudions maintenant les courbes représentées sur $\mathfrak{R}$ par les équations $\Theta_i(u, v) = 0$, $\Theta_i(u, v)$ étant une des seize fonctions normales d'ordre un.

L'ordre de la courbe $\Theta_i(u, v) = 0$ est égal à

$$\tfrac{1}{2}|2.3 - s'|,$$

s désignant le nombre de celles des dix demi-périodes primitives qui annulent $\Theta_i(u, v)$; or nous savons que ces dix demi-périodes sont celles qui n'annulent pas une même fonction thêta d'ordre un, qui est ici la fonction $\Theta_0(u, v)$ de caractéristique nulle, et il en résulte sans difficulté que la fonction $\Theta_i(u, v)$ s'annule pour quatre des demi-périodes considérées, à moins qu'elle ne soit la fonction $\Theta_0(u, v)$ elle-même. On a donc $s' = 4$ pour quinze des fonctions $\Theta_i(u, v)$ et le degré de la courbe correspondante est égal à 1.

Nous trouvons ainsi *quinze nouvelles droites* sur $\mathfrak{R}$.

Ces droites sont celles qui joignent deux à deux les six points doubles de $\mathfrak{R}$, car chacune des quinze fonctions $\Theta_i(u, v)$, autres que

---

[1] Dès maintenant nous pouvons dire que la surface de Kummer admet d'autres transformations univoques que les quinze collinéations et les seize réciprocités fondamentales.

$\Theta_0(u, v)$, s'annule pour deux des demi-périodes qui annulent $\Theta_0(u, v)$, c'est-à-dire pour les arguments de deux des six points doubles.

Les dix droites trouvées primitivement sont les arêtes des couples de plans qui passent par les six points doubles : en effet, chacune des dix demi-périodes qui correspondent à ces droites annule six des quinze fonctions $\Theta_i(u, v)$; en d'autres termes, chacune des dix droites primitives rencontre (n° **145**) six des quinze droites nouvelles, d'où l'on déduit de suite la proposition à établir.

Enfin la courbe $\Theta_0(u, v) = 0$, sur $\mathfrak{R}$, est une cubique gauche qui passe par les six points doubles.

Il résulte de là que $\mathfrak{R}$ est *le lieu des sommets des cônes du second ordre qui passent par les six points doubles,* car on sait que ce lieu est une surface du quatrième ordre, laquelle passe évidemment par les vingt-cinq droites et par la cubique gauche trouvées tout à l'heure [1].

180. Nous trouvons ainsi entre la surface lieu des sommets des cônes passant par six points et la surface de Kummer, K, un lieu remarquable, signalé pour la première fois par M. Darboux. Les coordonnées x d'un point de la surface $\mathfrak{R}$ sont liées aux coordonnées X d'un point de K, par des relations de la forme

$$x_j = S_j(X_1, X_2, X_3, X_4) \qquad (j = 1, 2, 3, 4), \tag{9}$$

où $S_j = 0$ est l'équation d'une surface cubique passant par trois coniques de K qui ont en commun un point singulier. D'après cela (n^{os} **44-49**) aux sections planes de $\mathfrak{R}$ correspondent, sur K, les courbes de contact de surfaces cubiques inscrites, douées de quatre points doubles : c'est là précisément la liaison indiquée par M. Darboux.

Cette liaison ne permettant pas de transformer aisément les propriétés connues de la surface de Kummer pour les étendre à la sur-

---

[1] *Voir,* sur cette surface :

Darboux, *Bulletin des Sciences mathématiques,* t. I, 1re série, p. 354; Hierholzer, *Math. Annalen,* t. II, p. 582; Schottky, *Journal de Crelle,* t. 105, p. 238; Reye, *ibid.,* t. 86, p. 87 et 98; Caspary, *Bulletin des Sciences mathématiques,* 1891.

face $\mathfrak{R}$, nous allons en déduire une seconde, d'application plus facile.

Il résulte de la proposition du n° **168** que la courbe commune à une quadrique et à $\mathfrak{R}$ aura une équation de la forme

$$\Theta(u, v) = 0,$$

$\Theta(u, v)$ étant une fonction thêta normale, paire, d'ordre six, à caractéristique nulle, donée d'un point double pour chacune des dix demi-périodes qui annulent les quatre fonctions $x_j(u, v)$, et réciproquement. Si la quadrique passe par les six points doubles de $\mathfrak{R}$, la fonction $\Theta(u, v)$ aura encore un point double pour chacune des six autres demi-périodes, et réciproquement.

Or, sur la surface de Kummer, dont les coordonnées $X_j(u, v)$ d'un point sont supposées proportionnelles à quatre fonctions d'ordre deux et de caractéristique nulle (n° **12**), la courbe $\Theta(u, v) = 0$ est sur une surface cubique (n° **50**) qui passe par les seize points singuliers. Mais toute surface cubique passant par les seize points singuliers de K est évidemment la première polaire d'un point de l'espace par rapport à K; il en résulte qu'aux courbes découpées sur $\mathfrak{R}$ par les quadriques menées par les six points doubles correspondent sur K les courbes de contact des tangentes issues d'un même point, et réciproquement. Si donc on transforme K par polaires réciproques en une autre surface de Kummer, K′, on voit qu'aux sections planes de K′ correspondent, sur $\mathfrak{R}$, les sections par des quadriques passant par les six points doubles, et réciproquement.

D'après cela, si X'_1, X'_2, X'_3, X'_4 sont les coordonnées d'un point de K′ et $x_1, \ldots, x_4$ celles d'un point de $\mathfrak{R}$, la liaison entre les deux surfaces sera exprimée par des relations de la forme

$$X'_j = C_j(x_1, x_2, x_3, x_4), \tag{10}$$

les surfaces $C_j = 0$ étant des quadriques passant par les six points doubles de $\mathfrak{R}$ [1].

---

[1] Cette relation entre K′ et $\mathfrak{R}$ est celle qu'a indiquée M. Reye au Tome 86 du *Journal de Crelle;* on voit qu'elle se déduit de celle de M. Darboux (entre K et $\mathfrak{R}$) en opérant sur K une transformation par polaires réciproques.

181. Cherchons inversement à exprimer les x en fonction des X'. Lorsque le point x décrit une section plane de $\mathfrak{R}$, le point X décrit, sur K, une sextique passant par dix points singuliers, et, par suite, le point X' décrira, sur K' (n° **78**) une courbe du huitième ordre de la famille singulière, ayant un point triple en un point singulier de K'.

On aura donc

$$x_j = R_j(X'_1, X'_2, X'_3, X'_4),$$

les surfaces $R_j = 0$ étant des surfaces du quatrième ordre, passant par quatre coniques de K' qui appartiennent à un même tétraèdre de Rosenhain (n° **50**); de plus, ces surfaces ont un point double en un même singulier de K', qu'on peut supposer différent des sommets du tétraèdre.

Ces résultats montrent également que les fonctions coordonnées d'un point de $\mathfrak{R}$ peuvent se mettre sous la forme

$$x_j(u', v') = \theta'_j(u', v'), \tag{11}$$

les $\theta'_j(u', v')$ étant des fonctions thêta impaires, d'ordre quatre, de caractéristique nulle, douées d'un point triple pour une des seize demi-périodes. On a donc ainsi un nouveau mode de représentation paramétrique de la surface $\mathfrak{R}$ [1].

182. La relation entre les surfaces $\mathfrak{R}$ et K' donne lieu à des conséquences intéressantes.

Considérons les relations (10) comme liant les points d'un espace E', où les coordonnées sont X', aux points d'un espace e, où les coordonnées sont x (Transformation de Reye). A un point, x, de e correspond un seul point X' de E', mais à un point X' correspondent *deux* points x, puisque trois quadriques $C_j(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ ont huit points communs, dont six sont fixes.

---

[1] Ce mode de représentation comprend, comme cas particulier, celui que M. Schottky a indiqué, et où les $\theta_j(u', v')$ sont des produits de quatre fonctions ϑ du premier ordre.

Le mode de représentation primitif comprend, comme cas particulier, celui de M. Caspary.

Lorsque X décrit un plan, x décrit une quadrique passant par les six points fixes; lorsque X′ décrit une droite, x décrit une biquadratique passant par ces points, et réciproquement.

Trois quadriques passant par les six points fixes se coupent en outre en deux points $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, qui correspondent à un même point X′ : si l'un de ses points, $x^{(1)}$, est sur $\mathfrak{U}$, parmi les quadriques qui passent par $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ et par les six points fixes, figure, d'après la définition de $\mathfrak{U}$, un cône ayant $x^{(1)}$ pour sommet; il en résulte de suite que les deux points $x^{(1)}$ et $x^{(2)}$ sont confondus. En d'autres termes, les deux points qui, par les relations (10), correspondent à un même point X′, pris sur K′, se confondent en un seul point situé sur $\mathfrak{U}$.

Le point X′ décrivant un plan tangent à K′, le point x décrit une quadrique passant par les six points fixes et tangente à $\mathfrak{U}$: cette quadrique est évidemment le cône qui passe par les six points, et qui a son sommet au point de $\mathfrak{U}$, correspondant du point de contact du plan considéré avec K′.

Observons enfin qu'une cubique passant par cinq points doubles de $\mathfrak{U}$ coupe en outre la surface en deux points, g_1 et g_2 : d'après la définition géométrique de $\mathfrak{U}$, ces deux points sont en ligne droite avec le sixième point double. Or l'ensemble de la cubique et de la droite $g_1 g_2$ peut être regardé comme une biquadrique, menée par les six points doubles, et tangente à $\mathfrak{U}$ aux deux points g_1 et g_2; en d'autres termes, cette biquadrique correspond à une tangente double de K′. Ainsi les points de contact d'une bitangente de K′ ont pour correspondants deux points de $\mathfrak{U}$ situés en ligne droite avec un des six points doubles.

Cette belle relation, indiquée par M. Darboux, met en évidence les six systèmes bien connus de bitangentes de la surface de Kummer.

185. Voici quelques applications de ces principes; nous les donnons sans développement, nous bornant à renvoyer aux propriétés de la surface de Kummer que nous transformons.

Une biquadratique passant par les six points doubles de $\mathfrak{U}$ coupe en outre la surface en quatre points p_1, p_2, p_3, p_4; à chaque répartition en deux couples de ces quatre points correspond une réparti-

tion en deux couples des quatre cônes passant par la biquadratique, ou, si l'on veut, des sommets des quatre cônes, q_1, q_2, q_3, q_4 (*couples conjugués,* n° **96**).

Les points p_1, p_2, p_3, p_4 *sont les sommets d'un premier tétraèdre; les points* q_1, q_2, q_3, q_4 *sont les sommets d'un second : chaque couple d'arêtes opposées d'un des tétraèdres s'appuie sur un couple d'arêtes opposées de l'autre* (n° **100**).

Les deux tétraèdres appartiennent donc à un système desmique de trois tétraèdres et jouissent ainsi des nombreuses propriétés qui caractérisent un tel système.

Deux points doubles quelconques de $\mathfrak{U}$ *sont les sommets opposés d'une double infinité de quadrilatères complets, dont les quatre autres sommets sont sur* $\mathfrak{U}$.

Cette proposition dérive d'un théorème de M. Darboux (n° **37**) en vertu duquel il existe des quadrilatères gauches dont les côtés sont des bitangentes d'une surface de Kummer et dont les sommets sont les points de contact de ces bitangentes.

Comme conséquence :

Les cônes des tangentes à $\mathfrak{U}$ *aux six points doubles de cette surface ont en commun une même cubique gauche, tracée sur la surface et passant par les six points* (¹).

184. Nous terminerons en indiquant quelques propriétés de deux systèmes de courbes remarquables tracées sur $\mathfrak{U}$.

Le premier système se compose des courbes, en nombre doublement infini, suivant lesquelles $\mathfrak{U}$ est coupée par les cônes quadriques qui ont pour sommets les points de $\mathfrak{U}$ et qui passent par les six points doubles ou *points fondamentaux* de $\mathfrak{U}$; ces courbes, lorsque $\mathfrak{U}$ est rapportée au système de coordonnées (11), ont pour équation générale

$$\mathfrak{S}(u' - \lambda, v' - \mu) = 0,$$

(¹) Hierholzer, *loc. cit.*

ϑ étant une fonction thêta du premier ordre, et λ, μ des constantes arbitraires. Nous désignerons ces courbes sous le nom de *courbes* γ'; chacune d'elles a un point double, en dehors des points fondamentaux.

Le second système se compose des courbes représentées par l'équation

$$\vartheta(u - \lambda, v - \mu) = 0,$$

lorsque $\mathfrak{R}$ est rapporté au système de coordonnées u, v du n° **179**; nous les appellerons *courbes* γ.

On démontre aisément que toute courbe γ a un point double, et qu'elle est le lieu des sommets des cônes du second ordre qui passent par les six points fondamentaux et par ce point double.

Les courbes γ et γ' jouissent des propriétés générales des courbes γ; elles sont de genre deux; les courbes γ sont d'ordre six, les courbes γ' d'ordre huit.

Chaque courbe γ ou γ' a six *pôles* (n° **145**), qui s'obtiennent géométriquement d'une manière simple, en vertu de cette proposition :

Chacune des droites joignant un des six points fondamentaux au point double d'une courbe γ *(ou* γ'*) rencontre en outre cette courbe en un nouveau point; les six points ainsi obtenus sont les pôles de la courbe.*

Inversement, chaque point de $\mathfrak{R}$ est le pôle de six courbes γ (ou γ') qui seront dites ses *courbes polaires*, et dont les points doubles se déterminent par le théorème précédent.

On démontre comme au n° **146** que :

Les six pôles des courbes γ *(ou* γ'*) qui passent par un point décrivent chacune une des courbes* γ *(ou* γ'*), polaires de ce point.*

Le lieu des points doubles des courbes γ ou γ' passant par un point se déduit du lieu des pôles par la construction indiquée plus haut; on voit ainsi que :

A chacune des six courbes γ' *polaires d'un même point de* $\mathfrak{R}$, *on*

peut associer un des six points fondamentaux, de telle sorte que les six cônes qui ont respectivement une des six courbes γ' pour directrice et le point fondamental correspondant pour sommet, se coupent suivant une même courbe nouvelle, située sur $\mathfrak{U}$.

Cette courbe nouvelle, lieu des points doubles des courbes γ' menées par un point, est aussi, par définition, le lieu des sommets des cônes quadriques passant par ce point et par les six points fondamentaux; c'est donc une courbe γ, ayant le point considéré pour point double.

On a ainsi entre les courbes γ et γ' la dépendance qu'indique l'énoncé suivant :

Soit une courbe γ' (ou γ) quelconque; les six cônes qui ont respectivement pour sommets les six points fondamentaux et qui passent par cette courbe coupent en outre $\mathfrak{U}$ *(en dehors de droites joignant les points fondamentaux) chacun suivant une courbe γ (ou γ'), ayant pour pôle le point double de la courbe γ' (ou γ) primitive.*

ERRATA.

La proposition analytique énoncée au n° 9 (p. 44) de ce Mémoire est inexacte; la démonstration indiquée établit seulement que : *si une fonction thêta est divisible par une fonction thêta aux mêmes périodes, le quotient est une fonction thêta aux mêmes périodes.*

C'est d'ailleurs dans ce sens que nous avons toujours appliqué la proposition.

TABLE DES MATIÈRES

DU MÉMOIRE DE M. HUMBERT.

PREMIÈRE PARTIE.

Pages.

Introduction 29
Généralités 32

DEUXIÈME PARTIE.

SURFACE DE KUMMER.

CHAPITRE I. — Premières propriétés 46
Théorème fondamental 51
Points et plans singuliers 54
Groupes remarquables de points et plans singuliers 59
CHAPITRE II. — Classification des courbes algébriques tracées sur la surface de Kummer 67
Surfaces inscrites à la surface de Kummer 76
CHAPITRE III. — Biquadratiques situées sur la surface de Kummer et quadriques inscrites à cette surface 78
CHAPITRE IV. — Sextiques et surfaces inscrites du troisième ordre 92
CHAPITRE V. — Courbes du huitième ordre et surfaces inscrites du quatrième ordre 105
CHAPITRE VI. — Sections de la surface de Kummer par ses plans tangents 112
CHAPITRE VII. — Applications diverses 123
CHAPITRE VIII. — Surfaces développables circonscrites à la surface de Kummer. 133
CHAPITRE IX. — Genre des courbes algébriques tracées sur la surface de Kummer, Géométrie sur ces courbes 139
CHAPITRE X. — Courbes univoques 154

TROISIEME PARTIE.

SURFACES HYPERELLIPTIQUES GÉNÉRALES.

CHAPITRE I. — Premières propriétés 361
CHAPITRE II. — Géométrie des courbes dans le champ hyperelliptique 370
CHAPITRE III. — Théorie des surfaces adjointes 389
Applications géométriques 410

CHAPITRE IV. — Classes particulières de surfaces hyperelliptiques..... 430
CHAPITRE V. — Étude de quelques surfaces hyperelliptiques..... 436

QUATRIÈME PARTIE.

SURFACES REPRÉSENTABLES POINT PAR POINT SUR LA SURFACE DE KUMMER.

Généralités..... 449
Surfaces hyperelliptiques du quatrième ordre..... 458
Étude d'une surface du quatrième ordre..... 466
ERRATA..... 473

TABLE DES MATIÈRES.

QUATRIÈME SÉRIE. — TOME IX.

Pages.

Études sur l'emploi des percussions dans la théorie du mouvement d'un liquide plongé dans un fluide (suite); par M. *H. Willotte* 5

Théorie générale des surfaces hyperelliptiques; par M. *G. Humbert*. 29 et 361

Étude sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann; par M. *J. Hadamard* 171

Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude de certaines équations différentielles ordinaires; par M. *Émile Picard*. 217

De l'équation $\Delta u = ke^u$ sur une surface de Riemann fermée; par M. *Émile Picard* 273

Commentaire aux principes de la Thermodynamique (deuxième Partie); par M. *P. Duhem* 293

FIN DU TOME IX DE LA QUATRIÈME SÉRIE.

1896 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55.

QA
1
J684
sér.4
t.9
Physical &
Applied Sci.
Serials

Journal de mathématiques
pures et appliquées

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY